В. В. Шлыков

ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для 8 класса
общеобразовательных учреждений
с русским языком обучения

Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь

3-е издание, переработанное

Минск «Народная асвета» 2011

УДК 514(075.3=161.1)
ББК 22.151я721
Ш69

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра геометрии, топологии и методики преподавания математики Белорусского государственного университета (кандидат физико-математических наук, доцент *С. Г. Кононов*);
учитель математики высшей категории Браславской государственной гимназии *Д. Г. Мацкевич*

Шлыков, В. В.
Ш69 Геометрия : учеб. пособие для 8-го кл. общеобразоват. учреждений с рус. яз. обучения / В. В. Шлыков. — 3-е изд., перераб. — Минск : Нар. асвета, 2011. — 166 с. : ил.
ISBN 978-985-03-1524-3.

УДК 514(075.3=161.1)
ББК 22.151я721

ISBN 978-985-03-1524-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1
Многоугольники

Глава 2
Площадь фигуры

Глава 3
Подобные треугольники

Дорогие друзья!

Данное учебное пособие предназначено для дальнейшего изучения систематического курса геометрии, которое было начато в предыдущем классе. В первой главе рассматривается понятие многоугольника, изучаются свойства параллелограмма, прямоугольника, квадрата, ромба и трапеции, доказываются признаки этих фигур. Кроме того, здесь рассматривается теорема Фалеса, вводятся понятия средней линии треугольника и трапеции, доказываются их признаки.

Учебный материал второй главы касается вопросов, связанных с понятием площади многоугольника. Здесь вводится понятие площади прямоугольника, параллелограмма, треугольника, трапеции и дается вывод формул для вычисления площадей этих фигур, доказывается теорема Пифагора и теорема, ей обратная.

В третьей главе учебного пособия изложен материал, связанный с понятием подобия фигур. Излагаются свойства подобных треугольников, доказывается теорема об отношении площадей подобных треугольников, признаки подобия треугольников, рассматривается вопрос о соотношениях между сторонами и углами прямоугольного треугольника.

При изложении теоретического материала и построении системы задач в учебном пособии уделено внимание рассмотрению плоских геометрических фигур в контексте многогранников. Такой подход позволяет развивать навыки распознавания свойств плоских фигур, расположенных в различных гранях прямоугольного параллелепипеда, прямой призмы и пирамиды. Система графических моделей и геометрической графики, приведенная в учебном пособии, способствует развитию навыков мысленного моделирования и чтения графических моделей.

1

МНОГОУГОЛЬНИКИ

Исследования Евклида подвели определенный итог многовековой научной деятельности мыслителей Древней Греции, благодаря которой геометрия стала восприниматься как средство познания природы, как инструмент, позволяющий расширить горизонты знания о ней за пределы, доступные человеческому опыту. Многовековое развитие науки убедительно подтвердило догадку древнегреческих мыслителей о том, что ***многие принципы, на которых базируется мироздание, можно выразить на языке математики и что геометрия, являясь ее важной составляющей, служит ключом к открытию многих тайн природы.***

Размышления мыслителей древности о роли геометрии в познании мира положили начало осмыслению значения геометрии в области астрономии и физики. Итальянский астроном Галилео Галилей (1564—1642) подчеркивал особую роль геометрии в раскрытии тайн Вселенной, был убежден в невозможности ее познания без понимания геометрического языка, на котором, по его мнению, она написана.

Человечеству периодически предоставляется возможность увидеть универсальность геометрических закономерностей, понять их роль в понимании устройства мира, значение в формировании научных представлений об окружающем пространстве и необходимость для познания законов Вселенной.

Ярким примером, иллюстрирующим роль геометрии как связующего звена между поколениями, служат исследования древнегреческого геометра и астронома Аполлония (ок. 262—190 до н. э.). Изучая «земные» свойства конических сечений, ученый вряд ли предполагал, что они найдут применение для характеристики космических законов движения планет, открытых в XVII веке астрономом Иоганном Кеплером (1571—1630). Под впечатлением открытия, что планеты Солнечной системы движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце, ученый восхищался величием геометрии и отмечал, что весь окружающий нас мир выражается в символах «геометрического искусства». Благодаря развитию геометрии дедуктивный метод мышления расширил перед человеком горизонты знаний об окружающем пространстве за пределы чувственной области знаний.

Математик Герман Вейль (1885—1955) отмечал, что ***именно геометрия явилась началом формирования математического способа мышления, «той особой формы рассуждений, посредством которой математика проникает в науки о внешнем мире — в физику, химию, биологию, экономику и т. д.».***

Глава 1
МНОГОУГОЛЬНИКИ

§ 1. Многоугольники. Сумма градусных мер углов выпуклого многоугольника

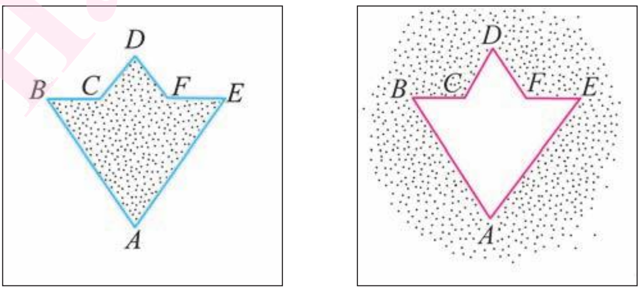
1. Многоугольники. В предыдущем классе было определено понятие *треугольника* — фигуры, состоящей из трехзвенной замкнутой ломаной и части плоскости, ею ограниченной. Теперь введем понятие *многоугольника*.

Предварительно напомним понятие ограниченной плоской фигуры. Плоская фигура называется *ограниченной*, если существует некоторый круг, которому принадлежит каждая точка данной фигуры. Если такого круга не существует, то фигура называется *неограниченной*.

Примерами ограниченных фигур служат отрезок, треугольник, квадрат. Такие фигуры, как прямая, луч и угол, являются неограниченными.

Пусть на плоскости дана простая замкнутая ломаная, т. е. замкнутая ломаная, у которой любые два звена, кроме смежных, не имеют общих точек. Тогда эта ломаная разделяет множество оставшихся точек на ограниченную и неограниченную фигуры. При этом ограниченная фигура называется частью плоскости, ограниченной данной ломаной.

Например, пусть дана простая замкнутая ломаная $ABCDFE$, имеющая шесть звеньев. На рисунке 1, *а* и 1, *б* изображены соответственно *ограниченная* и *неограниченная* фигуры, на которые ломаная $ABCDFE$ разделяет оставшиеся точки плоскости.



а) *б)*

Рис. 1

Определение. Многоугольником называется геометрическая фигура, состоящая из простой замкнутой ломаной и части плоскости, ограниченной этой ломаной.

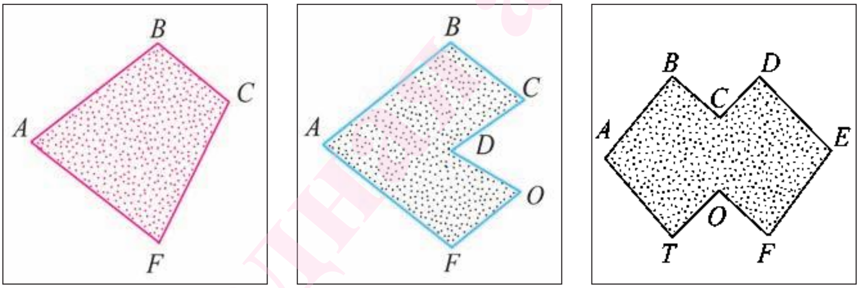
Вершины ломаной называются *вершинами* многоугольника, а звенья ломаной — его *сторонами*.

Две вершины многоугольника называются *соседними*, если они принадлежат одной стороне.

Точки многоугольника, не принадлежащие его сторонам, называются *внутренними*.

Многоугольник, имеющий n вершин (а значит, и n сторон), называется *n-угольником*.

Например, на рисунках 2, *а*, 2, *б* и 2, *в* изображены соответственно четырехугольник $ABCF$, шестиугольник $ABCDOF$ и восьмиугольник $ABCDEFOT$.



а) б) в)

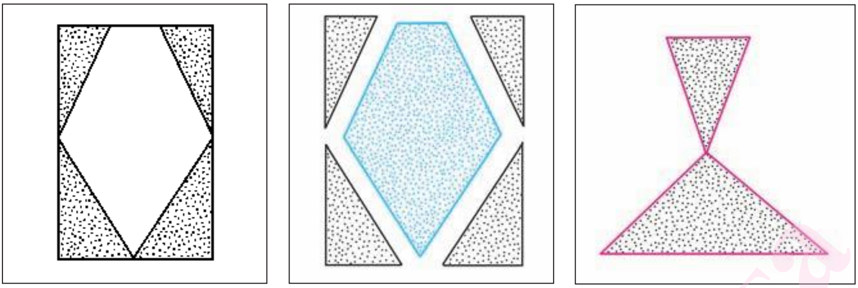
Рис. 2

Треугольник — это многоугольник с наименьшим числом сторон.

Если от листа бумаги, имеющего форму прямоугольника, отрезать уголки, как показано на рисунке 3, *а*, *б*, то в результате получится модель пятиугольника.

Заметим, что фигура, представляющая собой объединение многоугольников, может не быть многоугольником. Например, фигура, состоящая из двух треугольников, имеющих только одну общую вершину, не является многоугольником (рис. 3, *в*).

Среди множества многоугольников выделяются *выпуклые* и *невыпуклые* многоугольники.



а) б) в)

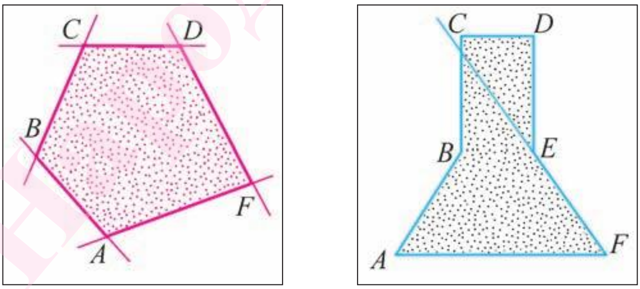
Рис. 3

О п р е д е л е н и е. **Многоугольник называется выпуклым, если он лежит в одной полуплоскости относительно каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.**

Многоугольник, который не является выпуклым, называется *невыпуклым*.

Например, на рисунке 4, *а* изображен выпуклый пятиугольник $ABCDF$, а на рисунке 4, *б* — невыпуклый шестиугольник $ABCDEF$.

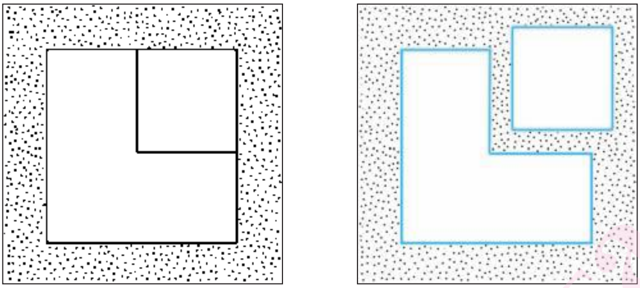
Шестиугольник $ABCDEF$ не является выпуклым, так как он не лежит в одной полуплоскости, например, относительно прямой, проходящей через соседние вершины E и F.



а) б)

Рис. 4

Модель невыпуклого шестиугольника мы получим, если от листа бумаги, имеющего форму квадрата, отрезать часть листа, также имеющую форму квадрата, например, так, как показано на рисунке 5, *а*, *б*.



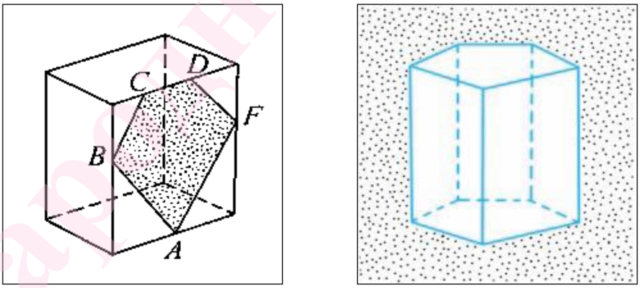
а) *б)*

Рис. 5

Примерами выпуклых многоугольников служат известные уже вам геометрические фигуры: треугольник, квадрат, прямоугольник.

Два многоугольника могут лежать в одной плоскости или лежать в различных плоскостях. Примером служат две грани параллелепипеда.

На рисунке 6, *а* изображен выпуклый пятиугольник $ABCDF$, который лежит в грани прямоугольного параллелепипеда.

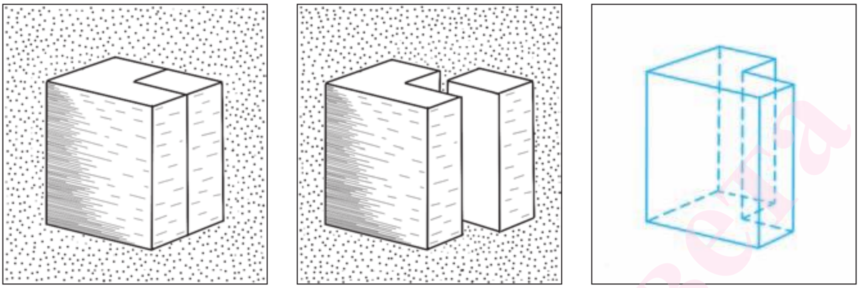


а) *б)*

Рис. 6

Примерами многоугольников, расположенных в различных плоскостях являются также два пятиугольника и пять прямоугольников, образующих поверхность прямой пятиугольной призмы, которая изображена на рисунке 6, *б*.

Модель прямой шестиугольной призмы, основаниями которой служат невыпуклые шестиугольники, получим, если от деревянного бруска, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, отпилить часть, также имеющую форму прямоугольного параллелепипеда, например, так, как показано на рисунке 7, *а*, *б*, *в*.

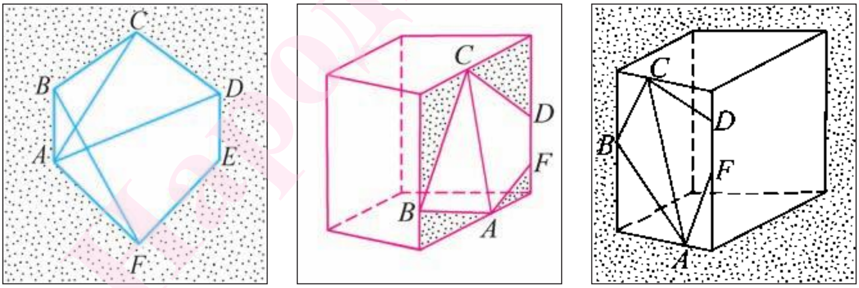


а) *б)* *в)*

Рис. 7

Диагональю многоугольника называется отрезок, концами которого служат его несоседние вершины.

Например, отрезки AC, AD, BF — диагонали выпуклого шестиугольника $ABCDEF$, изображенного на рисунке 8, *а*. Отрезок CA является диагональю выпуклого пятиугольника $ABCDF$, лежащего в боковой грани прямой четырехугольной призмы, которая изображена на рисунке 8, *б*, *в*.



а) *б)* *в)*

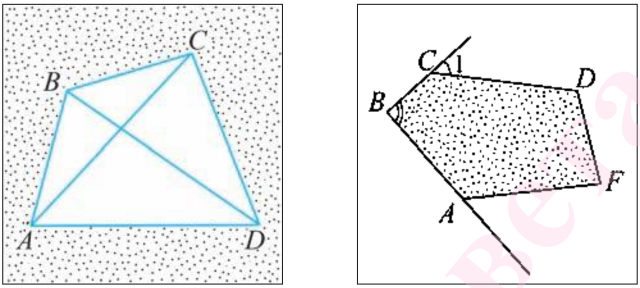
Рис. 8

Любой четырехугольник имеет только две диагонали.

Вершины четырехугольника, не являющиеся соседними, называются ***противолежащими.***

Стороны четырехугольника, не являющиеся смежными, называются ***противолежащими.***

Например, в четырехугольнике $ABCD$, изображенном на рисунке 9, *а*, противолежащими вершинами являются вершины A и C, B и D, а противолежащими сторонами — стороны AB и CD, BC и AD.



а) *б)*

Рис. 9

Периметром многоугольника называется сумма длин всех его сторон.

Периметр многоугольника $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ обозначается следующим образом: $P_{A_1A_2...A_n}$.

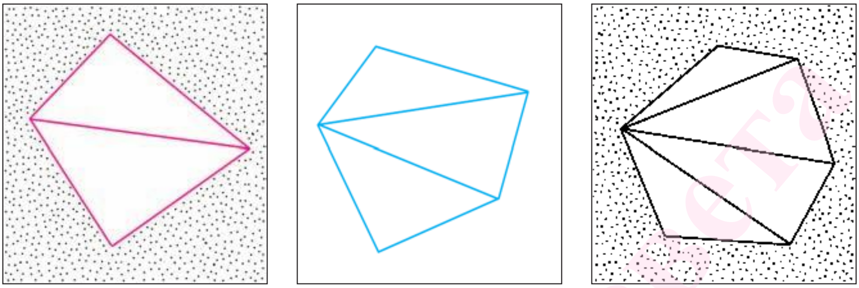
Углами (или внутренними углами) выпуклого n-угольника $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ называются углы $A_nA_1A_2$, $A_1A_2A_3$, ..., $A_{n-1}A_nA_1$, вершинами которых являются вершины n-угольника, а стороны содержат стороны n-угольника.

Например, для пятиугольника $ABCDF$ внутренними являются углы FAB, ABC, BCD, CDF и DFA. Стороны угла ABC содержат стороны AB и BC пятиугольника $ABCDF$ (рис. 9, *б*).

Внешним углом многоугольника при вершине многоугольника называется угол, смежный с углом многоугольника, вершина которого совпадает с данной вершиной многоугольника. Например, угол 1 является внешним углом пятиугольника $ABCDF$ при вершине C (см. рис. 9, *б*).

2. Сумма градусных мер углов выпуклого многоугольника. Как известно из курса геометрии седьмого класса, *сумма градусных мер углов треугольника равна* 180°. Теперь рассмотрим вопрос о сумме градусных мер углов любого выпуклого многоугольника.

Пусть у нас имеются, например, выпуклые четырехугольник, пятиугольник и шестиугольник (рис. 10, *а*, *б*, *в*). В каждом из них проведем все диагонали, соединяющие какую-то вершину с остальными вершинами. Тогда четырехугольник разделится на два треугольника, пятиугольник — на три треугольника, а шестиугольник — на четыре треугольника.



а) *б)* *в)*

Рис. 10

Аналогично любой n-угольник диагоналями, проведенными из одной вершины, разделится на $n - 2$ треугольника. Теперь докажем теорему о сумме градусных мер углов выпуклого многоугольника.

Теорема (*о сумме градусных мер углов выпуклого многоугольника*). ***Сумма градусных мер углов выпуклого n-угольника равна* $180° (n - 2)$.**

Доказательство.

1) Пусть дан выпуклый n-угольник. На рисунке 11 для определенности изображен семиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$.

2) Проведем из какой-либо вершины все его диагонали, тогда n-угольник разделится на $n - 2$ треугольника.

3) Сумма градусных мер углов выпуклого n-угольника равна сумме градусных мер углов треугольников, на которые он разделится проведенными диагоналями. Так как сумма градусных мер углов каждого треугольника равна $180°$, то сумма градусных мер углов выпуклого n-угольника равна $180° (n - 2)$.

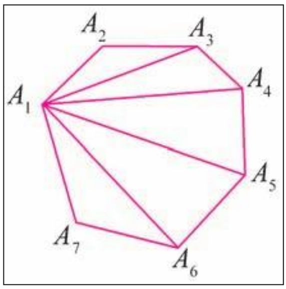


Рис. 11

Теорема доказана.

Из данной теоремы получим следствие.

Следствие. ***Сумма градусных мер углов выпуклого четырехугольника равна 360°.***

Задача. Отрезок AC — диаметр окружности, а точки B и D лежат на окружности и расположены по разные стороны от прямой AC (рис. 12). Докажите, что $\angle BAD + \angle BCD = 180°$.

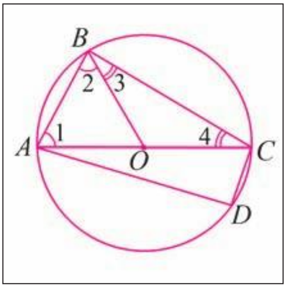


Рис. 12

Доказательство.

1) Пусть точка O — центр окружности, тогда отрезок BO — радиус данной окружности.

2) Треугольник AOB — равнобедренный, так как отрезки AO и BO — радиусы окружности. Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$.

3) Треугольник BOC является равнобедренным, поскольку $BO = CO$. Отсюда следует, что $\angle 3 = \angle 4$.

4) Сумма градусных мер углов любого треугольника равна 180°, следовательно, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$. Отсюда получим, что $2(\angle 2 + \angle 3) = 180°$, т. е. $\angle ABC = 90°$. Аналогично можно доказать, что $\angle ADC = 90°$.

5) Сумма градусных мер углов четырехугольника $ABCD$ равна 360°. Следовательно, $\angle BAD + \angle BCD = 360° - (\angle ABC + \angle ADC) = 180°$. Что и требовалось доказать.

Вопросы к § 1

1. Какая фигура называется многоугольником?

2. Какой многоугольник называется выпуклым?

3. Какой отрезок называется диагональю многоугольника?

4. Какой угол называется: внутренним; внешним углом многоугольника?

5. Что называется периметром многоугольника?

6. Сколько диагоналей можно провести из одной вершины выпуклого n-угольника?

7. Чему равна сумма градусных мер всех углов выпуклого n-угольника?

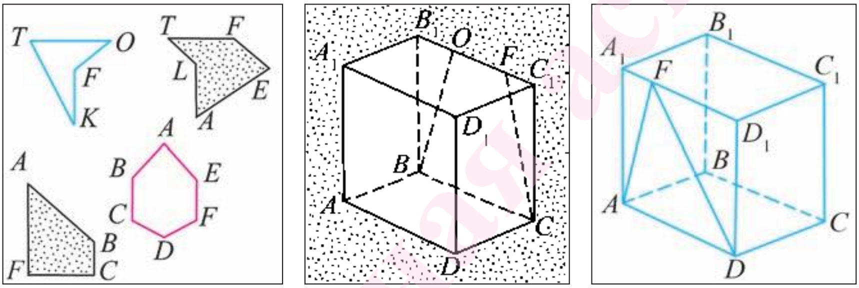
8. Чему равна градусная мера угла выпуклого десятиугольника, если все его углы равны между собой?

9. Существует ли такой многоугольник, у которого сумма градусных мер углов равна: а) 540°; б) 2000°? Если существует, то сколько в нем сторон?

10. Какие вершины (стороны) четырехугольника являются противолежащими?

Задачи к § 1

1. а) Назовите выпуклые и невыпуклые многоугольники, которые изображены на рисунке 13, *а*. б) В какой грани прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит выпуклый четырехугольник $BOFC$ (рис. 13, *б*)? в) В какой грани лежит треугольник ADF (рис. 13, *в*)?



а) *б)* *в)*

Рис. 13

2. Вычислите градусную меру угла D выпуклого четырехугольника $ABCD$, если известно, что $\angle A = 60°$, $\angle B = 120°$ и $\angle C = 150°$.

3. Вычислите градусные меры углов выпуклого четырехугольника $ABCD$, если известно, что $\angle A = \angle D$ и $\angle B = \angle C = 2\angle A$.

4. Углы выпуклого четырехугольника $ABCD$ удовлетворяют условиям: $\angle B - \angle D = 90°$, $\angle A + \angle C = 210°$. Вычислите градусные меры углов B и D.

5. Все углы выпуклого n-угольника равны между собой. Вычислите градусные меры этих углов, если число сторон равно: а) 4; б) 6; в)12.

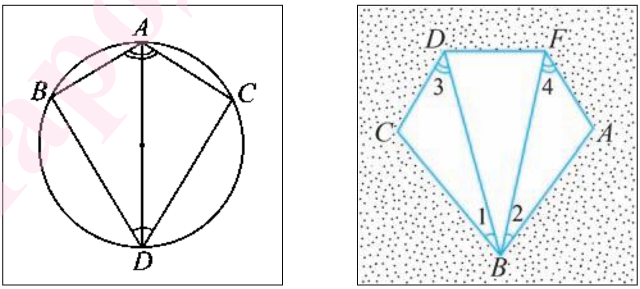
6. Стороны AB и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ равны и взаимно перпендикулярны. Вычислите длину диагонали AC, если известно, что $\angle BAD = 105°$, $\angle BCD = 135°$ и $AD = 8$ см.

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ градусные меры углов ABC и ADC равны соответственно $160°$ и $70°$. Вычислите градусную меру угла BAD, если известно, что $BC = BO = CO$, где точка O — середина диагонали BD.

8. Точка O — середина диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$, при этом $AB = AO = BO$. Вычислите длину стороны AB, если известно, что $\angle BAD = \angle BCD = 120°$ и $AD = 16$ см.

9. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагональ BD является биссектрисой угла ABC, перпендикулярна стороне CD и в два раза больше стороны AB. Вычислите градусные меры углов BCD и ADC, если медиана AO треугольника ABD равна стороне AB.

10. Вершины четырехугольника $ABDC$ лежат на окружности так, что диагональ AD является диаметром, а вершины B и C лежат по разные стороны от прямой AD (рис. 14, *а*). Вычислите градусные меры углов BAC и BDC, если известно, что стороны AB и AC равны радиусу окружности.



а) *б)*

Рис. 14

11. В выпуклом пятиугольнике $ABCDF$, изображенном на рисунке 14, *б*, стороны BC и BA равны, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Вычислите периметр четырехугольника $BCDF$, если $BC = 4$ см, $CD = 3$ см, $BD = 6$ см, $FD = 2$ см.

12. Вершина D выпуклого четырехугольника $ABCD$ лежит на серединном перпендикуляре к диагонали AC так, что $\angle ADC = 60°$. Вычислите периметр четырехугольника $ABCD$, если $AB = 2$ см, $BC = 5$ см, а длина диагонали AC равна 6 см.

13. В выпуклом пятиугольнике $ABCDF$ вершина A лежит на серединном перпендикуляре к стороне CD, $\angle CBA = \angle DFA = 90°$, $BC = DF = 2$ см. Вычислите периметр треугольника CDA, если $\angle BAF = 120°$ и $\angle BCA = 60°$.

14. Вершина B лежит на серединном перпендикуляре к диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$, а диагональ AC является биссектрисой угла BAD. Докажите, что прямая BC параллельна прямой AD.

15. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна стороне CD, $\angle BCD = 120°$, $CD = 5$ см, $AD = 10$ см. Докажите, что сторона BC параллельна стороне AD.

16. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ градусная мера угла DCB равна 120°, диагональ AC перпендикулярна стороне DA, а сторона DC в два раза больше стороны DA. Верно ли, что стороны BC и AD параллельны?

17. Диагонали TO и FD выпуклого четырехугольника $TFOD$ перпендикулярны сторонам OD и FT соответственно, а $TF = OD$. Докажите, что стороны FO и TD параллельны.

18. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle ABC = 120°$, а $\angle BAD = 60°$. Биссектрисы углов ABC и BAD пересекаются в точке O. Вычислите длину отрезка BO, если $AB = 16$ см.

19. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ сумма градусных мер углов ABC и BAD равна 180°, а биссектрисы этих углов пересекаются в точке F. Докажите, что прямая BF параллельна серединному перпендикуляру к отрезку AF.

Науку и искусство иногда рассматривают как противоположные друг другу виды человеческой деятельности. Наука имеет дело с абстракциями, а искусство оперирует конкретными образами, неизменно обращается к ощущениям и чувствам. В науке господствует расчет и рационализм, искусству ближе эмоции, оно более интуитивно. Но только на первый взгляд эти два рода деятельности человека являются взаимоисключающими. ***Что касается геометрии и искусства, то это разграничение представляется наименее антагонистичным.*** Например, если говорить об архитектуре и живописи, то здесь очень важную роль играет геометрический расчет. ***Произведение искусства тем более притягательно, оказывает тем большее эмоциональное воздействие на зрителя, чем гармоничнее сочетание геометрического расчета и чувственных переживаний художника.***

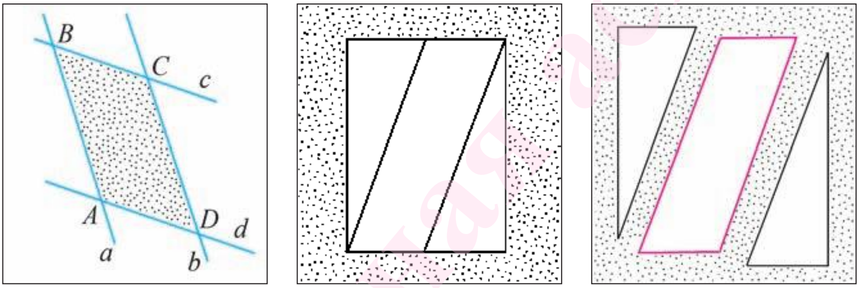
Созданные на протяжении многих столетий произведения художников и архитекторов служат яркой иллюстрацией гармонии геометрических законов перспективы и духовного потенциала, свидетельствуют о постоянном стремлении человека посредством искусства проникнуть в тайны творчества и выразить в произведениях архитектуры и живописи извечное стремление человека к поиску ответов на вопросы философского характера. Неповторимые шедевры оказывают огромное эстетическое воздействие на зрителя и вызывают ощущение красоты именно благодаря удивительно гармоничному сплаву духовности и геометрических закономерностей. Не случайно известный итальянский ученый и теоретик искусства Раннего Возрождения Леон Альберти (1404—1472) подчеркивал, что ни один живописец не может создать впечатляющие художественные произведения без соответствующих знаний по геометрии, вообще не способен понять правила создания художественных произведений, вызывающих ощущение красоты.

Красота произведений искусства тесно связана также с применением геометрического аспекта понятия симметрии, посредством которой, как отмечал Герман Вейль, «человек на протяжении многих веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство». Понятие симметрии постоянно находилось в поле зрения художников, архитекторов и ученых. История развития цивилизации свидетельствует, что эстетические взгляды человека формировались под воздействием проявления симметрии, постижению тайн которой и способствует изучение геометрии.

§ 2. Параллелограмм. Свойства и признаки параллелограмма

1. Параллелограмм и его свойства. Среди множества четырехугольников выделяют такие, которые удовлетворяют определенным условиям и называются *параллелограммами*. В данном параграфе дадим определение параллелограмма и рассмотрим его свойства.

Определение. Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противолежащие стороны попарно параллельны.



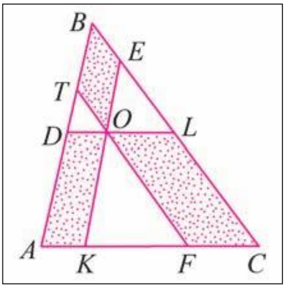
а) *б)* *в)*

Рис. 15

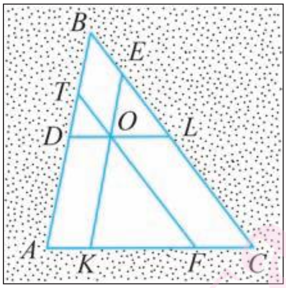
Например, пусть параллельные прямые a и b пересекают параллельные прямые c и d в точках A, B, C и D, как показано на рисунке 15, *а*. Тогда четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, так как $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$.

Модель параллелограмма, не являющегося прямоугольником, можно получить, если от листа бумаги, имеющего форму прямоугольника, отрезать две модели равных прямоугольных треугольников, как показано на рисунке 15, *б*, *в*.

Если через внутреннюю точку O треугольника ABC проведены прямые DL, TF и KE, параллельные сторонам AC, BC и AB соответственно, то тогда четырехугольники $ADOK$, $TBEO$ и $OLCF$ являются параллелограммами (рис. 16, *а*, *б*).



а)



б)

Рис. 16

Теперь рассмотрим теоремы о свойствах параллелограмма.

Теорема 1 (*о свойстве сторон и углов параллелограмма*). ***В параллелограмме противолежащие стороны равны и противолежащие углы равны.***

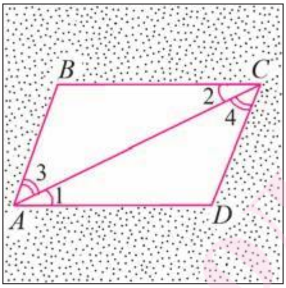


Рис. 17

Доказательство.

1) Пусть дан параллелограмм $ABCD$ (рис. 17). Докажем, что $AB = CD$, $BC = AD$ и $\angle BAD = \angle BCD$, $\angle ABC = \angle ADC$.

2) Диагональ AC делит параллелограмм на два равных треугольника. Треугольник ABC равен треугольнику CDA по стороне и двум прилежащим к ней углам (AC — общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых BC и AD секущей AC, $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и DC секущей AC).

3) Из равенства треугольников ABC и CDA следует, что $AB = CD$, $BC = AD$ и $\angle ABC = \angle ADC$.

4) Кроме того, $\angle BAD = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle BCD$.

Теорема доказана.

Теорема 2 (*о свойстве диагоналей параллелограмма*). ***Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.***

Доказательство.

1) Пусть $ABCD$ — параллелограмм, а O — точка пересечения его диагоналей AC и BD (рис. 18). Докажем, что $AO = OC$ и $BO = OD$.

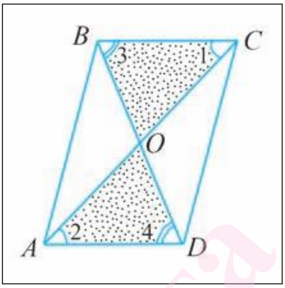


Рис. 18

2) Заметим, что треугольник BOC равен треугольнику DOA по стороне и двум прилежащим к ней углам ($BC = AD$ как противолежащие стороны параллелограмма, $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых BC и AD секущей AC, $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых BC и AD секущей BD).

3) Из равенства треугольников BOC и DOA следует, что $BO = OD$ и $AO = OC$.

Теорема доказана.

2. Признаки параллелограмма. По определению параллелограмма признаком, по которому среди множества четырехугольников можно выбрать параллелограмм, является параллельность противолежащих сторон четырехугольника. Теперь рассмотрим другие признаки параллелограмма, позволяющие среди множества четырехугольников выделять те, которые являются параллелограммами.

Теорема 3 (*первый признак параллелограмма*). ***Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм.***

Доказательство.

1) Пусть в четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD параллельны и равны (рис. 19). Докажем, что такой четырехугольник является параллелограммом.

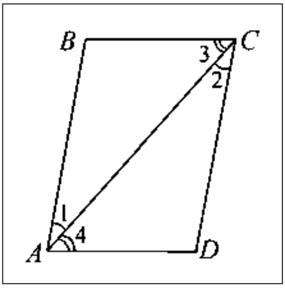


Рис. 19

2) Так как $AB \parallel CD$, то достаточно доказать, что $BC \parallel AD$. Проведем диагональ AC и рассмотрим треугольники ABC и CDA, на которые она делит четырехугольник $ABCD$.

3) Треугольники ABC и CDA равны по двум сторонам и углу между ними (AC — общая сторона, $AB = CD$ по условию,

$\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей AC).

4) Из равенства треугольников ABC и CDA следует, что $\angle 3 = \angle 4$. Так как $\angle 3$ и $\angle 4$ являются накрест лежащими при пересечении прямых BC и AD секущей AC, то по признаку параллельности прямых получаем, что $BC \parallel AD$. Таким образом, $AB \parallel CD$ по условию и $BC \parallel AD$ по доказанному, т. е. в четырехугольнике $ABCD$ противолежащие стороны попарно параллельны, а значит, он является параллелограммом.

Теорема доказана.

Теорема 4 (*второй признак параллелограмма*). ***Если в четырехугольнике противолежащие стороны попарно равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.***

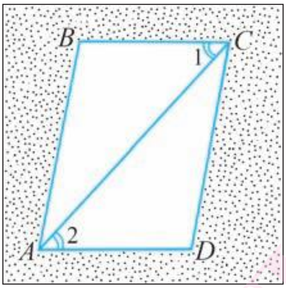


Рис. 20

Доказательство.

1) Пусть в четырехугольнике $ABCD$ выполняются условия $AB = CD$ и $BC = AD$ (рис. 20). Докажем, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

2) Рассмотрим треугольники ABC и CDA, на которые диагональ AC делит четырехугольник $ABCD$.

3) Треугольник ABC равен треугольнику CDA по трем сторонам (AC — общая сторона, $AB = CD$ и $BC = AD$ по условию).

4) Из равенства треугольников ABC и CDA следует, что $\angle 1 = \angle 2$. Эти углы являются накрест лежащими при пересечении прямых BC и AD секущей AC. Следовательно, по признаку параллельности прямых $BC \parallel AD$.

5) Таким образом, $BC = AD$ и $BC \parallel AD$. Следовательно, по признаку параллелограмма (теорема **3**) четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Теорема доказана.

Теорема 5 (*третий признак параллелограмма*). ***Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то такой четырехугольник — параллелограмм.***

Доказательство.

1) Пусть $ABCD$ — четырехугольник, диагонали которого AC и BD пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам, т. е. $AO = OC$ и $BO = OD$ (рис. 21).

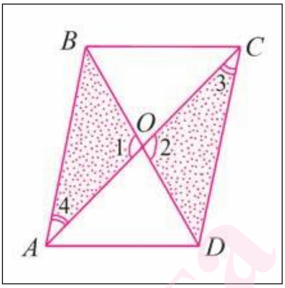


Рис. 21

2) Треугольник AOB равен треугольнику COD по двум сторонам и углу между ними ($AO = OC$ и $BO = OD$ по условию, $\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные). Следовательно, $AB = CD$ и $\angle 3 = \angle 4$.

3) Углы 3 и 4 являются накрест лежащими при пересечении прямых AB и CD секущей AC, а, значит, по признаку параллельности прямых $AB \parallel CD$.

4) Таким образом $AB \parallel CD$ и $AB = CD$. Отсюда по признаку параллелограмма (теорема 3) следует, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Теорема доказана.

Задача. В четырехугольнике $ABCD$ $AB \parallel DC$, $BC \parallel AD$ и $CD = a$. Прямая AD и серединный перпендикуляр l к стороне AB пересекаются в точке F. Найдите расстояние от точки F до вершины B, если $\angle ABC = 120°$ (рис. 22, *а, б*).

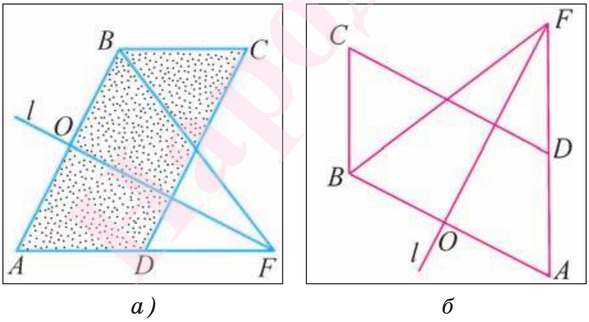


Рис. 22

Дано: $ABCD$ — четырехугольник,
$AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$,
$\angle ABC = 120°$,
l — серединный перпендикуляр к отрезку AB,
$F = AD \cap l$.

Найти: BF.

Решение.

Пусть O — середина отрезка AB ($O \in l$). Точка F принадлежит серединному перпендикуляру l к отрезку AB, следовательно, $BF = FA$. Таким образом, расстояние от точки F

а) б)

до вершины B равно длине отрезка FA, который является гипотенузой прямоугольного треугольника AOF.

1) Так как $BC \parallel AD$ и $\angle ABC = 120°$, то $\angle BAF = 180° - 120° = 60°$ (сумма градусных мер односторонних углов при пересечении параллельных прямых BC и AD секущей AB равна 180°).

2) По условию $AB \parallel DC$, $BC \parallel AD$, таким образом, по определению следует, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, а, значит, по свойству параллелограмма $AB = CD = a$.

3) В прямоугольном треугольнике AOF ($\angle AOF = 90°$, $\angle AFO = 90° - 60° = 30°$, $AO = \frac{a}{2}$) катет AO лежит против угла, равного 30°, значит, $AF = 2AO = a$. Таким образом, $BF = FA = a$.

Ответ: a.

Вопросы к § 2

1. Какой четырехугольник называется параллелограммом?

2. Каким свойством обладают противолежащие углы параллелограмма?

3. Каким свойством обладают противолежащие стороны параллелограмма?

4. Верно ли, что диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам?

5. Верно ли, что сумма градусных мер углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна 180°?

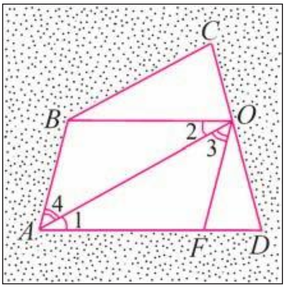
6. В четырехугольнике две стороны равны и параллельны. Верно ли, что этот четырехугольник является параллелограммом?

7. Верно ли, что четырехугольник, у которого противолежащие стороны попарно равны, является параллелограммом?

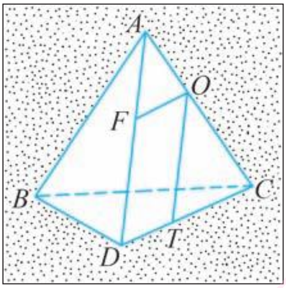
8. Каким свойством должны обладать диагонали четырехугольника, чтобы он являлся параллелограммом?

Задачи к § 2

20. Точки O и F лежат соответственно на сторонах CD и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ так, что $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ (рис. 23, *а*). Докажите, что четырехугольник $ABOF$ — параллелограмм.



а)



б)

Рис. 23

21. $ABCD$ — тетраэдр (рис. 23, *б*). Точки O, F и T лежат на ребрах AC, AD и DC соответственно так, что $FO \parallel DC$ и $TO \parallel AD$. Верно ли, что четырехугольник $DFOT$, лежащий в грани ACD, является параллелограммом?

22. Точки F и E лежат соответственно на сторонах BC и AD параллелограмма $ABCD$ так, что $AF \parallel CE$. Отрезки FE и AC пересекаются в точке T. Докажите, что $FT = TE$ и $AT = TC$.

23. Дан параллелограмм $ABCD$. Точки O и F лежат соответственно на сторонах BC и AD так, что $AO \parallel CF$. Диагональ BD пересекает отрезки AO и CF в точках T и E соответственно. Точка P лежит на стороне CD так, что $\angle COP = \angle CBD$, отрезки OP и CF пересекаются в точке Q. Верно ли, что четырехугольник $TOQE$ — параллелограмм?

24. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, $BD = 12$ см, $AD = 7$ см и $AO = 11$ см. Вычислите периметр треугольника BOC, если $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$.

25. Периметр четырехугольника $ABCD$, в котором $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$, равна 24 см. Вычислите длины сторон четырехугольника, если длина одной из них больше длины другой на 2 см.

26. В параллелограмме $ABCD$ градусная мера угла CDA равна $150°$, а расстояние от вершины D до прямой AB равно 4 см. Вычислите длины сторон параллелограмма, если его периметр равен 42 см.

27. В параллелограмме $ABCD$ диагональ BD перпендикулярна стороне AD. Найдите периметр параллелограмма, если $\angle BCD = 60°$ и $BC = a$.

28. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 18 см. Вычислите длины сторон параллелограмма, если $\angle ADB = 90°$ и $\angle ABC = 120°$.

29. Точка O лежит на основании BC равнобедренного треугольника ABC, а точки F и E — на боковых сторонах AB и AC соответственно так, что $OE \parallel AB$ и $OF \parallel AC$. Вычислите длину боковой стороны треугольника, если $P_{OFAE} = 16$ см.

30. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке O. Вычислите периметр параллелограмма, если $BO = 7$ см, $OC = 2$ см.

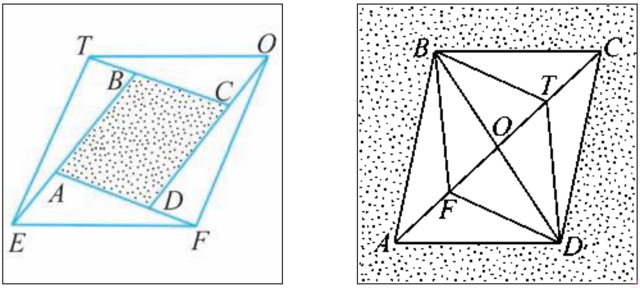
31. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 20 см. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке F, а прямую CD — в точке T. Вычислите длину отрезка CT, если $BF = 3$ см.

32. Точки O и F — середины сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$ соответственно. Докажите, что четырехугольник $AOCF$ есть параллелограмм.

33. $ABCD$ — параллелограмм, точки F и E лежат соответственно на сторонах BC и AD так, что $\angle BAF = \angle DCE$. Верно ли, что четырехугольник $AFCE$ является параллелограммом?

34. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм (рис. 24, *а*). Точки O, F, E и T лежат на лучах DC, AD, BA и CB так, что $CO = \frac{1}{2}DC$, $AE = \frac{1}{2}AB$, $TB = \frac{1}{2}BC$ и $DF = \frac{1}{2}AD$. Докажите, что четырехугольник $TOFE$ является параллелограммом.

35. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, O — точка пересечения его диагоналей. Точки F и T лежат на прямой AC так, что $AF = FO$ и $CT = TO$ (рис. 24, *б*). Докажите, что четырехугольник $FBTD$ есть параллелограмм.



а) б)

Рис. 24

36. $ABCD$ — параллелограмм, точки F и O лежат на прямой CD так, что $DF = CD$ и $CO = CD$. Докажите, что четырехугольники $ABDF$ и $ABOC$ — параллелограммы.

37. Точка O лежит на основании AC равнобедренного треугольника ABC, а точки T и F лежат на сторонах AB и BC соответственно так, что $\angle OFC = 40°$ и $\angle OCF = 70°$. Вычислите длину отрезка TB, если $FC = 5$ см и $\angle AOT = 70°$.

38. Точки O и F лежат на диагонали BD параллелограмма $ABCD$ так, что $BO = DF$. Докажите, что четырехугольник $AOCF$ есть параллелограмм.

39. Точка O лежит на стороне BC треугольника ABC, а точки F и E соответственно на сторонах AB и AC. Докажите, что треугольник ABC является равнобедренным, если отрезки AO и FE имеют общую середину, а $\angle FOE = \angle BCA$.

40. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 36 см. Длина одной из сторон на 2 см больше длины другой. Вычислите расстояние от вершины B до прямой AD, если $\angle ADC = 150°$.

41. Постройте параллелограмм по сторонам a, b и диагонали m.

42. Постройте параллелограмм по двум диагоналям m_1, m_2 и углу β между ними.

43. Постройте параллелограмм по стороне a, диагонали m и углу β между ними.

44. Постройте параллелограмм по стороне a, диагонали m и углу β, противолежащему этой диагонали.

45. Диагонали AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, если $BO = OD$ и $\angle OAD = \angle OCB$.

46. Точки O, K и F лежат соответственно на сторонах AC, AB и BC равностороннего треугольника ABC так, что $\angle FOC = \angle AOK = 60°$. Найдите периметр треугольника ABC, если периметр четырехугольника $KBFO$ равен a.

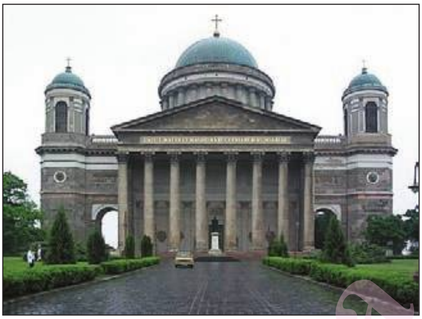
47. Периметр параллелограмма равен 30 см, а градусная мера его острого угла равна 60°. Диагональ параллелограмма делит тупой угол на части в отношении $1 : 3$. Вычислите длины сторон параллелограмма.

48. На сторонах BC и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки O и F так, что пары отрезков BF и AO, FC и OD имеют общие середины. Вычислите градусную меру угла BCD, если $\angle ABC = 110°$.

49. Постройте треугольник по двум сторонам a, b и медиане m, проведенной к третьей стороне.

50. Постройте параллелограмм по диагонали d, стороне a и высоте h, проведенной к данной стороне.

51. Постройте параллелограмм по стороне a, диагонали d и углу α, лежащему против этой диагонали.



Развитие геометрии происходило, по меньшей мере, благодаря двум аспектам. С одной стороны, она развивалась благодаря причинам, вытекающим из внутренних потребностей, определяемых логикой развития самой геометрии, а с другой стороны, благодаря внешнему фактору, который определялся необходимостью применения геометрических методов в области искусства и естествознания.

Геометрическая интуиция и геометрические закономерности в различные периоды развития естествознания способствовали осмыслению наблюдений астрономов и физиков, а во многих случаях являлись источником идей и принципов, на которых создавались новые научные теории. Развитие цивилизации подтверждает, что взаимодействие геометрии и естествознания не является чем-то таким, что может быть определено однозначно, оно также богато и разнообразно, как и само естествознание. Примером тому служат исследования древнегреческого математика Архимеда (ок. 287—212 до н. э.), который свою научную деятельность начинал как инженер и создатель различных механических приспособлений, широкое использование которых в строительстве и в быту способствовало приобретению им известности во всей Древней Греции.

Заслуженную славу Архимеду снискали его научные результаты, характеризующиеся многообразием подходов к решению сложных задач геометрии и механики и оказавших существенное влияние на развитие многих областей науки. Например, геометрические методы Архимеда, применяемые при вычислении площадей и объемов геометрических фигур, явились предвестниками созданного через многие столетия трудами Г. В. Лейбница (1646—1716) и И. Ньютона (1643—1727) интегрального исчисления. Научные работы Архимеда служат примером того, как идеи механики могут способствовать получению геометрических результатов, которые, в свою очередь, находят применение в естествознании.

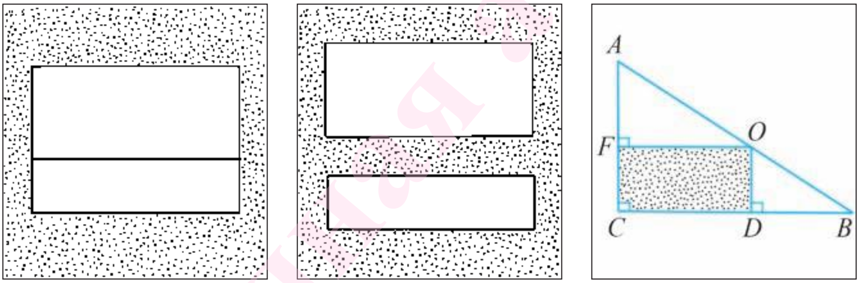
Плодотворность взаимного влияния геометрии и конкретной области естествознания иллюстрирует сферическая геометрия, возникновение и развитие которой было обусловлено потребностями астрономии. ***В ряде случаев для решения различных научных проблем естествознания являются важными геометрические методы и те идеи, источником которых служит область геометрии.*** Применение теорий, построенных на основе идеи симметрии в области элементарных частиц и кристаллографии, подтверждает точку зрения Германа Вейля (1885—1955) о том, что «все априорные утверждения физики имеют своим источником симметрию».

§ 3. Прямоугольник. Свойства и признаки прямоугольника

1. Прямоугольник и его свойства. Среди множества всех параллелограммов можно выделить те из них, у которых все углы прямые. Такие параллелограммы называются *прямоугольниками*.

Определение. **Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.**

Как уже отмечалось ранее, представление о форме прямоугольника дает страница книги или тетради. Если лист бумаги, имеющий форму прямоугольника, разрезать на две части, как показано на рисунке 25, *а*, *б*, то в результате получим две модели прямоугольника.



а) *б)* *в)*

Рис. 25

Пусть точка O лежит на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC и отрезки OF, OD — перпендикуляры, проведенные из точки O соответственно к прямым AC и BC (рис. 25, *в*). Тогда четырехугольник $CFOD$ является прямоугольником. Действительно, так как $FO \parallel CD$ и $FC \parallel OD$, то $CFOD$ — параллелограмм. Кроме того, $\angle FCD = \angle CFO = \angle CDO = \angle FOD = 90°$, следовательно, параллелограмм $CFOD$ является прямоугольником.

Примерами прямоугольников, лежащих в различных плоскостях, являются грани любого прямоугольного параллелепипеда.

Заметим, что так как каждый *прямоугольник* является параллелограммом, то он *обладает* всеми *свойствами параллелограмма*.

1) *Противолежащие стороны прямоугольника параллельны.*

2) *В прямоугольнике противолежащие стороны равны.*

3) *Диагонали прямоугольника точкой пересечения делятся пополам.*

Теперь докажем еще одно свойство прямоугольника.

Теорема 1 (*о диагоналях прямоугольника*). ***Диагонали прямоугольника равны.***

Доказательство.

1) Пусть четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник, диагонали которого AC и BD (рис. 26). Докажем, что $AC = BD$.

2) Прямоугольные треугольники CDA и BAD равны по двум катетам (AD — общий катет, $AB = CD$).

3) Из равенства треугольников BAD и CDA следует, что $AC = BD$.

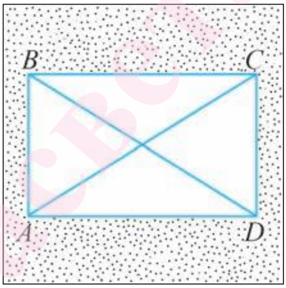
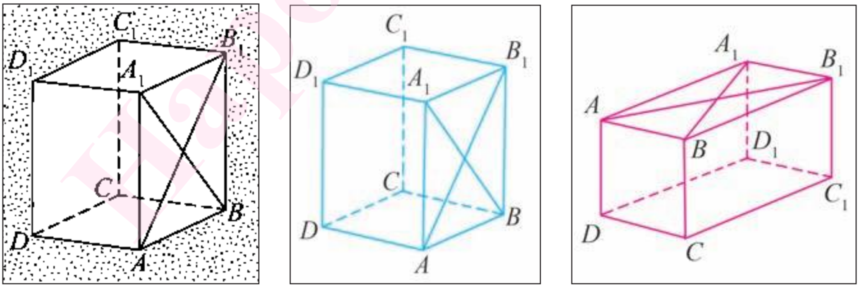


Рис. 26

Теорема доказана.

Например, пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, изображения которого даны на рисунке 27, *а*, *б*, *в*. Диагонали A_1B и B_1A грани AA_1B_1B равны между собой, так как каждая грань, а значит, и грань AA_1B_1B прямоугольного параллелепипеда является прямоугольником.



а) *б)* *в)*

Рис. 27

2. Признаки прямоугольника. Согласно определению прямоугольника признаком, по которому среди множества параллелограммов можно выбрать прямоугольник, является то, что градусная мера каждого из его углов равна 90°.

Теперь рассмотрим еще один признак, по которому из множества параллелограммов можно выделить те, которые являются прямоугольниками.

Теорема 2 (*признак прямоугольника*). ***Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм является прямоугольником.***

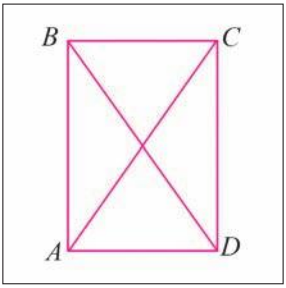


Рис. 28

Доказательство.

1) Пусть четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм и его диагонали AC и BD равны (рис. 28). Докажем, что выполняются равенства $\angle DAB = \angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = 90°$.

2) Треугольник BAD равен треугольнику CDA по трем сторонам (AD — общая сторона, $AB = CD$ как противолежащие стороны параллелограмма, $AC = BD$ по условию теоремы).

3) Из равенства треугольников BAD и CDA следует, что $\angle DAB = \angle CDA$. А так как в параллелограмме противолежащие углы равны, то $\angle DAB = \angle BCD$ и $\angle CDA = \angle ABC$. Таким образом, $\angle DAB = \angle ABC = \angle BCD = \angle CDA$. Так как $\angle DAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA = 360°$, то $\angle DAB = \angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = 90°$.

Теорема доказана.

Задача 1. Точки F и O — середины сторон CD и AB прямоугольника $ABCD$ соответственно. Найдите периметр четырехугольника $AOCF$, если $\angle AFC = 120°$ и $CD = a$.

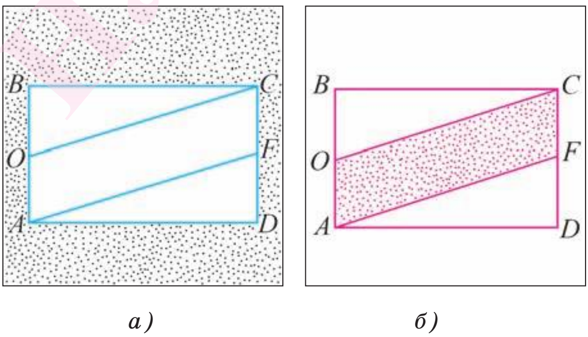


Рис. 29

Дано: $ABCD$ — прямоугольник, $F \in CD$, $DF = FC$, $O \in AB$, $AO = OB$, $\angle AFC = 120°$, $CD = a$ (рис. 29, *а*, *б*).

Найти: P_{AOCF}.

Р е ш е н и е.

1) Определим вид четырехугольника $AOCF$. Так как $ABCD$ — прямоугольник, то $AB = CD$ и $AB \parallel CD$. По условию задачи $AO = \frac{1}{2}AB$, $CF = \frac{1}{2}AB$, значит, $AO = CF = \frac{a}{2}$. В четырехугольнике $AFCO$ противолежащие стороны AO и CF равны и параллельны. Следовательно, $AOCF$ — параллелограмм и $P_{AOCF} = 2FC + 2AF$.

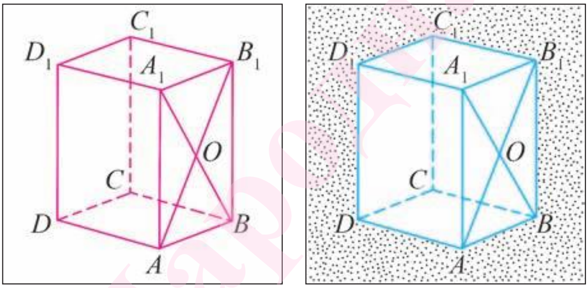
2) В прямоугольном треугольнике ADF находим $\angle AFD = 180° - \angle AFC = 180° - 120° = 60°$. Следовательно, $\angle FAD = 30°$.

3) В прямоугольном треугольнике ADF катет FD лежит против угла в $30°$, значит, $FD = \frac{1}{2}AF$, т. е. $AF = 2FD = a$.

4) Теперь находим $P_{AOCF} = 2FC + 2AF = 2 \cdot \frac{a}{2} + 2a = 3a$.

О т в е т: $3a$.

Задача 2. Диагонали A_1B и AB_1 грани AA_1B_1B прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке O. Вычислите периметр треугольника OB_1B, если $B_1A + B_1B = 14$ см (рис. 30, *а*, *б*).



а) *б)*

Рис. 30

Д а н о:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед,
$B_1A \cap A_1B = O$,
$B_1A + BB_1 = 14$ см.
В ы ч и с л и т ь:
P_{OB_1B}.

Р е ш е н и е.

1) Так как $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, то каждая его грань является прямоугольником. Следовательно, грань AA_1B_1B также есть прямоугольник.

2) Периметр $P_{OB_1B} = B_1O + OB + BB_1$. Так как грань AA_1B_1B является прямоугольником, то ее диагонали A_1B и B_1A равны и точкой пересечения делятся пополам, т. е. $A_1O = OB = B_1O = AO$.

3) Таким образом, $P_{OB_1B} = B_1O + OB + BB_1 = B_1A + BB_1 = 14$ см.

Ответ: 14 см.

Вопросы к § 3

1. Какой параллелограмм называется прямоугольником?

2. Какими свойствами обладает прямоугольник?

3. Каким свойством обладают диагонали прямоугольника?

4. Какому условию должны удовлетворять диагонали параллелограмма, чтобы этот параллелограмм являлся прямоугольником?

5. Верно ли, что четырехугольник, у которого три угла прямые, является прямоугольником?

6. В четырехугольнике диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам. Верно ли, что такой четырехугольник есть прямоугольник?

Задачи к § 3

52. Вычислите периметр прямоугольника $ABCD$, если $AB = 7$ см, а длина стороны BC на 2 см больше длины стороны AB.

53. Вычислите периметр прямоугольника, если длина его большей стороны равна 17 см, а разность длин сторон — 7 см.

54. Периметр прямоугольника равен 32 см. Вычислите длины его сторон, если длина одной стороны в три раза больше длины другой стороны.

55. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Вычислите периметр треугольника COD, если $CD = 4$ см и $\angle CAD = 30°$.

56. Отрезки AC и BD — диаметры окружности с центром в точке O. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник.

57. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O и $AC + CD = 10$ см. Вычислите периметр треугольника COD.

58. Диагонали AC и BD прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки F и P — середины сторон AB и AD соответственно. Докажите, что четырехугольник $AFOP$ — прямоугольник (рис. 31, *а*).

59. Отрезок BO — высота равнобедренного треугольника ABC. Точки K и F лежат на боковых сторонах AB и BC соответственно так, что $KF \perp BO$. Точки D и E лежат на основании AC так, что $KD \parallel BO$ и $FE \parallel BO$. Верно ли, что четырехугольник $DKFE$ является прямоугольником (рис. 31, *б*)?

60. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, O — точка пересечения диагоналей грани $A_1B_1C_1D_1$, а точка F — середина ребра A_1B_1. Вычислите градусную меру угла $A_1D_1B_1$, если $\angle FOA_1 = 40°$ (рис. 31, *в*).

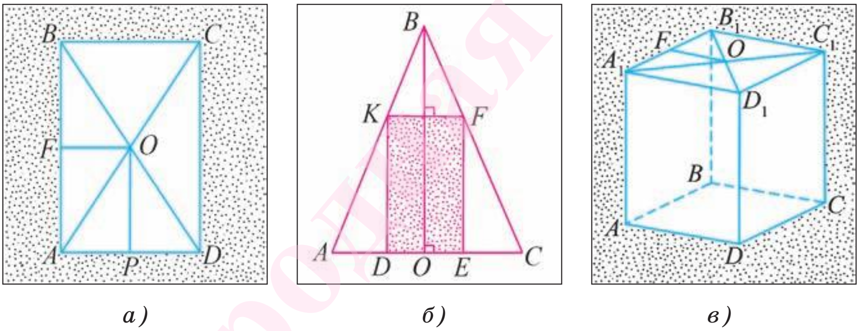


Рис. 31

61. Докажите, что вершины прямоугольника лежат на окружности с центром в точке пересечения его диагоналей и радиусом, равным половине диагонали.

62. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, отрезок OF — высота треугольника AOD. Вычислите градусную меру угла COF, если $\angle ADB = 40°$.

63. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, отрезок BF — высота треугольника ABO. Вычислите длину отрезка FO, если $\angle BAO = 60°$, $CD = 4$ см.

64. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, отрезок DF — биссектриса треугольника OCD. Вычислите длину стороны AB, если $\angle BOA = 60°$ и $FO = 3$ см.

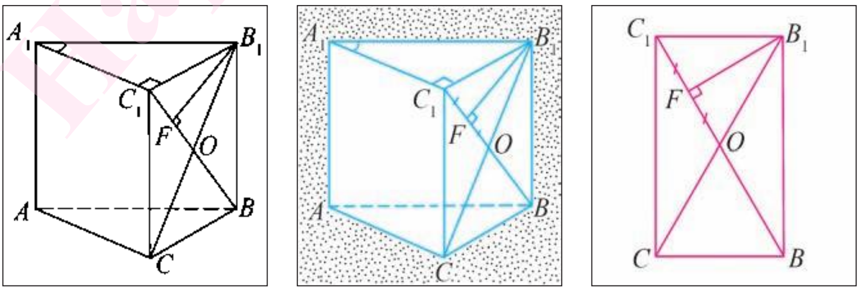
65. $ABCD$ — прямоугольник, градусная мера угла ABD которого в два раза больше градусной меры угла ADB. Найдите длину диагонали AC, если известно, что $CD = a$.

66. В прямоугольнике $ABCD$ диагональ AC в два раза больше стороны CD. Чему равна градусная мера угла COD, где O — точка пересечения диагоналей прямоугольника?

67. Точки F и O лежат соответственно на боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC так, что $AF = CO$. Отрезки FD и OE — перпендикуляры, проведенные из точек F, O к основанию AC. Докажите, что четырехугольник $DFOE$ — прямоугольник.

68. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, отрезок BF — высота треугольника ABO. Вычислите длины диагоналей прямоугольника, если $AB = 10$ см, а точка F является серединой отрезка AO.

69. Биссектриса угла B прямоугольника $ABCD$ делит его сторону на отрезки AO и OD так, что $AO = 2OD$. Вычислите длины сторон прямоугольника, если его периметр равен 28 см.



а) *б)* *в)*

Рис. 32

70. $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма, O — точка пересечения диагоналей грани CC_1B_1B. Основанием призмы служит прямоугольный треугольник с углом $C_1A_1B_1$, градусная мера которого равна 30°, и гипотенузой $A_1B_1 = a$. Найдите длины диагоналей грани CC_1B_1B, если высота B_1F треугольника B_1C_1O делит отрезок C_1O пополам (рис. 32, *а*, *б*, *в*).

71. Отрезок AB — диаметр окружности, а точки C и D лежат на окружности по разные стороны от прямой AB так, что $AC = BD$. Докажите, что четырехугольник $ACBD$ — прямоугольник.

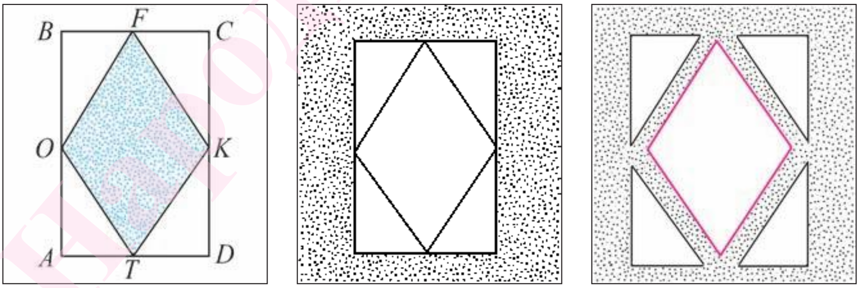
§ 4. Ромб. Квадрат. Свойства, признаки ромба и квадрата

1. Ромб. Свойства и признаки ромба. Среди множества всех параллелограммов можно выделить те, у которых все стороны равны. Такие параллелограммы называются *ромбами*.

Определение. **Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.**

Например, пусть $ABCD$ — прямоугольник, а точки O, F, K и T — середины сторон AB, BC, CD и DA соответственно. Тогда четырехугольник $OFKT$ — ромб. Действительно, прямоугольные треугольники TAO, FBO, FCK и TDK попарно равны по двум катетам. Из равенства этих треугольников следует, что $TO = OF = FK = KT$. В четырехугольнике $OFKT$ противолежащие стороны попарно равны, значит, $OFKT$ — параллелограмм, а так как в параллелограмме $OFKT$ все стороны равны, то $OFKT$ — ромб (рис. 33, *а*).

Модель ромба получится, если от листа бумаги прямоугольной формы отрезать равные уголки, как показано на рисунке 33, *б, в*.



а) *б)* *в)*

Рис. 33

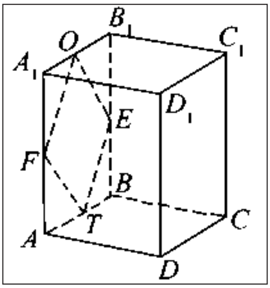
Ромбом, который лежит в боковой грани AA_1BB_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, является четырехугольник $FOET$, вершинами которого служат середины ребер AA_1, A_1B_1, B_1B и AB соответственно (рис. 34, *а*, *б*). Грань AA_1B_1B изображена без искажений на рисунке 34, *в*.

Так как ромб есть параллелограмм, у которого все стороны равны, то он обладает всеми свойствами параллелограмма. Таким образом, *ромб имеет* следующие *свойства*.

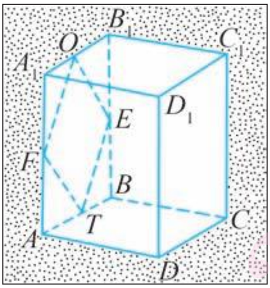
1) *Противолежащие стороны ромба параллельны.*

2) *Диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам.*

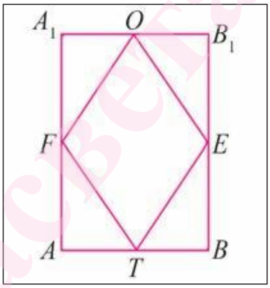
3) *Противолежащие углы ромба равны.*



а)



б)



в)

Рис. 34

Теперь докажем еще одно свойство ромба, которое не следует непосредственно из определения ромба.

Теорема 1 (*о свойстве диагоналей ромба*). ***Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят углы ромба пополам.***

Доказательство.

1) Пусть $ABCD$ — ромб, отрезки AC и BD — его диагонали, которые пересекаются в точке O (рис. 35).

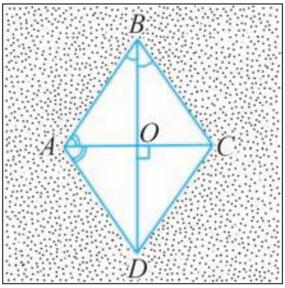


Рис. 35

2) Треугольник BAD равнобедренный, так как по условию $BA = AD$. Диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам, следовательно, отрезок AO — медиана равнобедренного треугольника BAD.

3) Так как медиана равнобедренного треугольника, проведенная к его основанию, является высотой и биссектрисой этого треугольника, то $AO \perp BD$ и $\angle BAC = \angle DAC$.

Аналогично можно доказать, что $\angle ABD = \angle CBD$.

Теорема доказана.

Теперь докажем признак ромба, пользуясь которым можно определить, является ли параллелограмм ромбом.

Теорема 2 (*признак ромба*). ***Если в параллелограмме диагонали взаимно перпендикулярны, то этот параллелограмм является ромбом.***

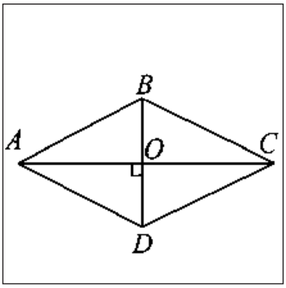


Рис. 36

Доказательство.

1) Пусть $ABCD$ — параллелограмм, диагонали которого AC и BD взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке O (рис. 36). Докажем, что $ABCD$ — ромб.

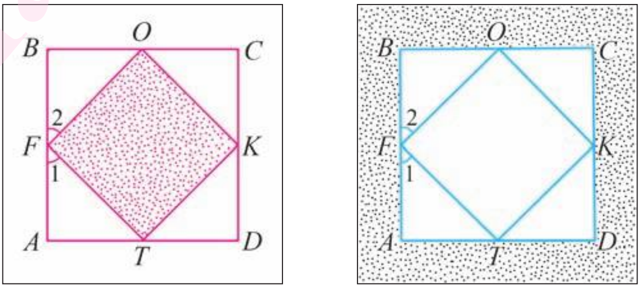
2) Так как по условию теоремы диагонали перпендикулярны, то треугольники BOC, DOC, DOA и BOA являются прямоугольными.

3) Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, следовательно, прямоугольные треугольники BOC, DOC, DOA и BOA попарно равны по двум катетам. Из равенства треугольников следует, что $AB = BC = CD = DA$, т. е. $ABCD$ — ромб.

Теорема доказана.

2. Квадрат. Свойства и признаки квадрата. Среди множества прямоугольников выделяются такие, которые называются *квадратами*. Рассмотрим свойства и признаки квадрата.

Определение. **Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны.**



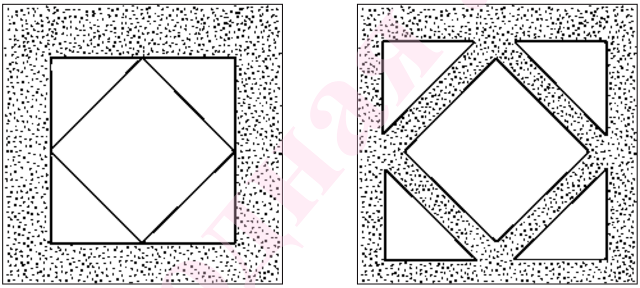
а) *б)*

Рис. 37

Например, пусть $ABCD$ — квадрат, а точки F, O, K и T — середины его сторон, тогда четырехугольник $FOKT$ также является квадратом (рис. 37, *а*, *б*).

Действительно, равнобедренные прямоугольные треугольники TAF, OBF, OCK и KDT равны по двум катетам. Из равенства треугольников следует, что $TF = FO = OK = KT$. Так как эти треугольники прямоугольные и равнобедренные, то каждый их острый угол равен 45°. Отсюда следует, например, что $\angle OFT = 180° - (\angle 1 + \angle 2) = 90°$. Аналогично $\angle FOK = \angle OKT = \angle KTF = 90°$, т. е. $FOKT$ — прямоугольник. Таким образом, $FOKT$ есть прямоугольник, у которого все стороны равны, а значит, он является квадратом.

Если от листа бумаги, имеющего форму квадрата, отрезать части, имеющие форму равных прямоугольных равнобедренных треугольников, то в результате получим еще одну модель квадрата (рис. 38, *а*, *б*).



а) *б)*

Рис. 38

Четырехугольник $OFKT$, вершинами которого служат середины ребер A_1D_1, A_1B_1, B_1C_1 и C_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, является квадратом, служащим частью грани $A_1B_1C_1D_1$ куба (рис. 39, *а*, *б*, *в*).

Так как прямоугольник является параллелограммом, то и квадрат является параллелограммом, у которого все стороны равны, т. е. квадрат является ромбом. Таким образом, отсюда следует, что *квадрат* обладает всеми *свойствами прямоугольника и ромба*.

1) *Противолежащие стороны квадрата параллельны.*

2) *Диагонали квадрата точкой пересечения делятся пополам.*

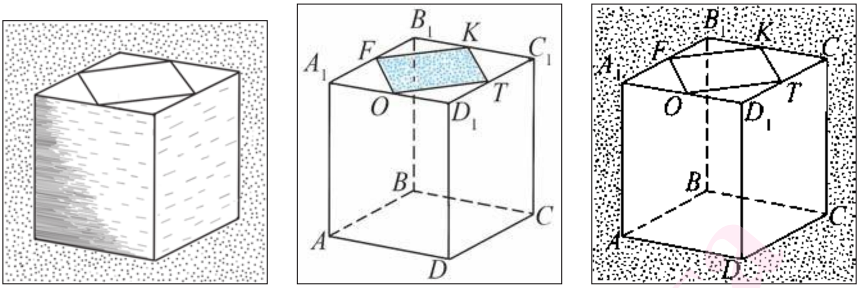


Рис. 39

3) *Диагонали квадрата равны.*

4) *Диагонали квадрата взаимно перпендикулярны и делят углы квадрата пополам.*

Признак, по которому можно определить, является ли четырехугольник квадратом, содержится в определении квадрата. Если четырехугольник является прямоугольником, у которого все стороны равны, то такой четырехугольник есть квадрат.

Теперь докажем еще один признак квадрата.

Теорема 3 (*признак квадрата*). ***Если в прямоугольнике диагонали взаимно перпендикулярны, то этот прямоугольник есть квадрат.***

Доказательство. Пусть $ABCD$ — прямоугольник, у которого диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны. Всякий прямоугольник является параллелограммом. Следовательно, имеем, что в параллелограмме $ABCD$ диагонали взаимно перпендикулярны. Отсюда на основании признака ромба получаем, что прямоугольник $ABCD$ есть ромб, т. е. $AB = BC = CD = DA$. Таким образом, в прямоугольнике $ABCD$ все стороны равны, а значит, он является квадратом.

Теорема доказана.

Задача. Отрезок AO — высота равностороннего треугольника ABC. Точки D и F расположены на сторонах AB и AC соответственно так, что $DO \parallel AC$ и $FO \parallel AB$. Вычислите длину отрезка DF, если $P_{OFAD} = 20$ см.

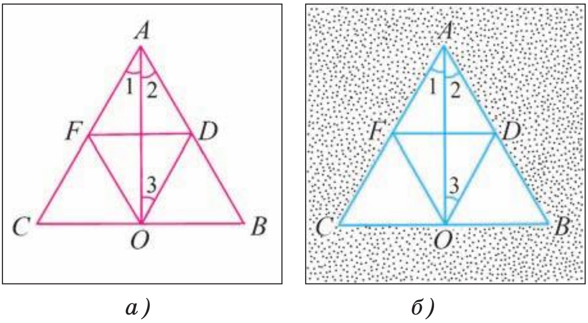


Рис. 40

Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC = CA$, $D \in AB$, $F \in AC$, $DO \parallel AC$, $FO \parallel AB$, $P_{OFAD} = 20$ см (рис. 40, *а*, *б*).

Вычислить: FD.

Решение.

1) Прежде всего определим вид четырехугольника $OFAD$.

Так как $DO \parallel AF$ и $FO \parallel AD$, то четырехугольник $OFAD$ является параллелограммом, а, значит, $DO = AF$ и $FO = AD$. Отрезок AO — высота равностороннего треугольника, следовательно, AO является биссектрисой угла CAB, т. е. $\angle 1 = \angle 2$. Кроме того, $\angle 1 = \angle 3$ как накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых DO и AF секущей AO.

2) Из равенств $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 1 = \angle 3$ следует, что $\angle 2 = \angle 3$, а, значит, треугольник OAD — равнобедренный, $AD = DO$. Из равенств $FO = AD$, $DO = AF$ и $AD = DO$ следует, что четырехугольник $OFAD$ есть ромб.

3) В треугольнике FAD угол A равен $60°$ и $AF = AD$, отсюда следует, что этот треугольник является равносторонним, а, значит, $FD = FA$. Таким образом, $FD = FA = \frac{1}{4} P_{OFAD} = \frac{1}{4} \cdot 20 = 5$ (см).

Ответ: 5 см.

Вопросы к § 4

1. Какой параллелограмм называется ромбом?

2. Верно ли, что диагонали ромба перпендикулярны?

3. Верно ли, что диагонали ромба делят его углы пополам?

4. При каком условии параллелограмм является ромбом?

5. Верно ли, что четырехугольник, у которого диагонали перпендикулярны, является ромбом?

6. Будет ли четырехугольник ромбом, если его диагонали перпендикулярны и только одна диагональ делится их точкой пересечения пополам?

7. Какой прямоугольник называется квадратом?

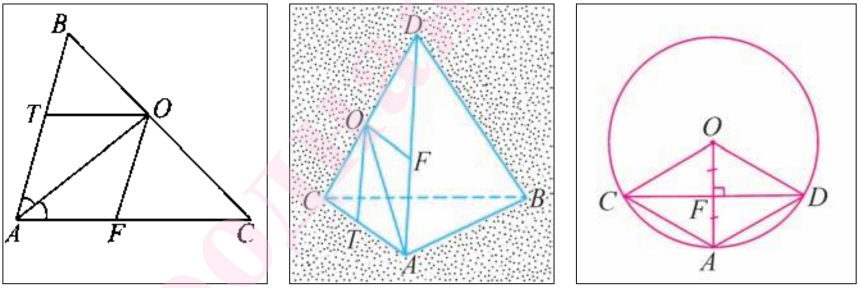
8. Какими свойствами обладает квадрат?

9. При каком условии прямоугольник является квадратом?

Задачи к § 4

72. Отрезок AO — биссектриса треугольника ABC (рис. 41, *а*). Отрезки OT и OF параллельны сторонам AC и AB соответственно. Докажите, что четырехугольник $ATOF$ — ромб.

73. На рисунке 41, *б* изображен тетраэдр $DABC$. Отрезок AO — медиана грани DAC, точки F и T лежат на ребрах DA и AC соответственно так, что $OF \parallel AC$ и $OT \parallel DA$. Докажите, что четырехугольник $AFOT$, лежащий в грани DAC, является ромбом.



а) б) в)

Рис. 41

74. Докажите, что параллелограмм, у которого две смежные стороны равны, является ромбом.

75. Отрезок BF — медиана равнобедренного треугольника ABC с основанием AC. Точка D лежит на луче BF так, что $BF = FD$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является ромбом.

76. Хорда CD окружности с центром в точке O перпендикулярна радиусу OA и проходит через его середину F (рис 41, *в*). Докажите, что четырехугольник $ACOD$ — ромб.

77. Отрезки BF и DO — перпендикуляры, проведенные из вершин ромба $ABCD$ соответственно к прямым, содержащим стороны CD и BA. Докажите, что четырехугольник $BFDO$ — прямоугольник.

78. Вычислите периметр ромба $ABCD$, если известно, что серединный перпендикуляр к стороне BC проходит через вершину D и $BD = 10$ см.

79. Вычислите градусные меры углов ромба $ABCD$, если его периметр равен 24 см и $AC = 6$ см.

80. Докажите, что перпендикуляры, проведенные из точки пересечения диагоналей ромба к его сторонам, равны.

81. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O. Отрезки OF и OT — перпендикуляры, проведенные к сторонам CD и BC соответственно. Вычислите градусные меры углов треугольника TOF, если диагональ BD равна стороне DA.

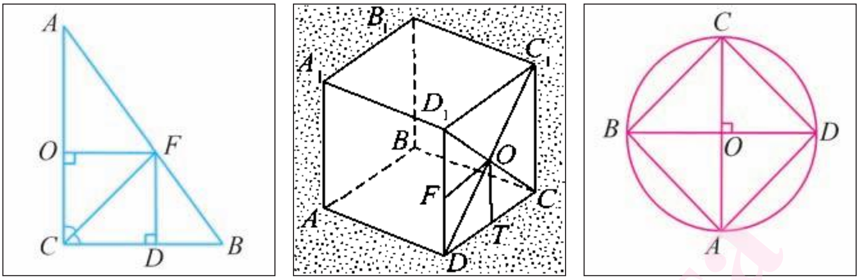
82. Диагональ AC ромба $ABCD$ равна a. Найдите периметр ромба, если известно, что угол между перпендикулярами, которые проведены из точки пересечения диагоналей к сторонам AB и BC, равен $120°$.

83. Из вершины B тупого угла ромба $ABCD$ проведен перпендикуляр BF к стороне AD. Вычислите длину диагонали BD ромба, если $BC = 6$ см и $2BF = AC$.

84. Диагонали ромба образуют с его стороной углы, один из которых в два раза меньше другого. Вычислите длину меньшей диагонали ромба, если его периметр равен 16 см.

85. Постройте ромб: а) по двум диагоналям a и b; б) по стороне a и одной из диагоналей m; в) по диагонали d и углу α, который эта диагональ образует со стороной.

86. В прямоугольном треугольнике ACB отрезок CF — биссектриса прямого угла, отрезки FO и FD — перпендикуляры, проведенные к катетам AC и BC соответственно. Докажите, что четырехугольник $COFD$ — квадрат (рис. 42, *а*).



а) б) в)

Рис. 42

87. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, диагонали D_1C и C_1D грани DD_1C_1C пересекаются в точке O, а точки F и T — середины ребер DD_1 и DC соответственно. Докажите, что четырехугольник $FOTD$, расположенный в грани DD_1C_1C, является квадратом (рис. 42, *б*).

88. ABC — равнобедренный прямоугольный треугольник с прямым углом B, отрезок BO — медиана этого треугольника. Точка F лежит на луче BO так, что $BO = OF$. Докажите, что четырехугольник $ABCF$ — квадрат.

89. Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки F, E, T и K — середины отрезков OB, OC, OD и OA соответственно. Верно ли, что четырехугольник $FETK$ — квадрат?

90. В треугольнике ABC угол C прямой и $AC = BC$. Отрезок CO — высота этого треугольника, точки F и T — основания перпендикуляров, проведенных из точки O к сторонам AC и BC соответственно. Найдите длину стороны AB, если $FT = a$.

91. Отрезки AC и BD — взаимно перпендикулярные диаметры окружности с центром в точке O. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — квадрат (рис. 42, *в*).

92. $ABCD$ — квадрат, а точки O, F, T и K лежат на сторонах BC, CD, DA и AB соответственно так, что $BO = CF = DT = AK$. Докажите, что четырехугольник $OFTK$ — квадрат.

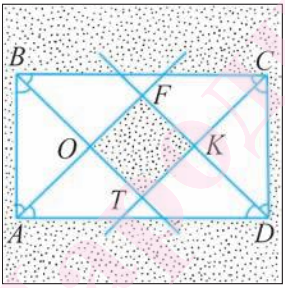
93. Точки O и F лежат на диагонали BD квадрата $ABCD$ так, что $BO = DF$. Докажите, что четырехугольник $AOCF$ — ромб.

94. Докажите, что параллелограмм, у которого расстояния от точки пересечения диагоналей до его сторон равны, является ромбом.

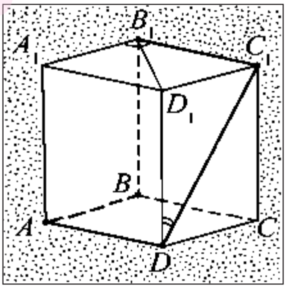
95. Высота ромба, проведенная из вершины тупого угла, делит сторону ромба пополам. Вычислите градусные меры углов ромба.

96. Из вершины тупого угла ромба проведен перпендикуляр к его стороне. Вычислите градусную меру угла между большей диагональю и проведенным перпендикуляром, если известно, что перпендикуляр в два раза меньше большей диагонали.

97. $ABCD$ — прямоугольник, биссектрисы внутренних углов которого пересекаются в точках O, F, K и T (рис. 43, *а*). Докажите, что четырехугольник $OFKT$ — квадрат.



а)



б)

Рис. 43

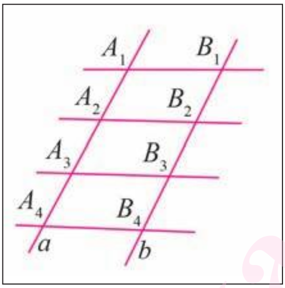
98. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая призма, основаниями которой служат ромбы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 43, *б*). Найдите длину ломаной $BADC_1B_1$, если $B_1D_1 = a$, градусная мера угла $A_1B_1C_1$ ромба равна $120°$ и $\angle D_1DC_1 = 30°$.

§ 5. Теорема Фалеса. Средняя линия треугольника

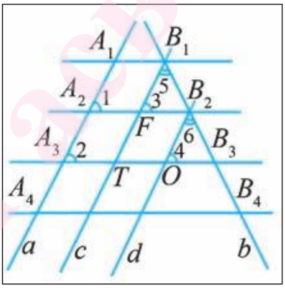
В данном параграфе докажем теорему Фалеса и рассмотрим признак и свойства средней линии треугольника.

1. Теорема Фалеса.

Теорема 1 (*теорема Фалеса*). ***Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие другую прямую, то они отсекут на ней равные между собой отрезки.***



а)



б)

Рис. 44

Доказательство.

Пусть на прямой a отложены равные отрезки A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4,... и через их концы проведены параллельные прямые, которые пересекают прямую b в точках B_1, B_2, B_3,... (рис. 44, *а*, *б*). Требуется доказать, что отрезки B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4,... равны между собой.

Первый случай (*прямые a и b параллельны*).

Если прямые a и b параллельны, то $A_1A_2 = B_1B_2$, $A_2A_3 = B_2B_3$ как противолежащие стороны параллелограммов $A_1B_1B_2A_2$ и $A_2B_2B_3A_3$ (рис. 44, *а*). Так как по условию $A_1A_2 = A_2A_3$, то $B_1B_2 = B_2B_3$. Аналогично можно доказать, что $B_2B_3 = B_3B_4$ и т.д.

Второй случай (*прямые a и b пересекаются*).

1) Проведем через точки B_1 и B_2 соответственно прямые c и d, параллельные прямой a. Пусть $F = c \cap A_2B_2$ и $O = d \cap A_3B_3$, $T = c \cap A_3B_3$. Рассмотрим треугольники B_1FB_2 и B_2OB_3. По доказанному в первом случае имеем, что $B_1F = FT$. Кроме

того, $FT = B_2O$ как противолежащие стороны параллелограмма FB_2OT. Следовательно, $B_1F = B_2O$.

2) Заметим, что $\angle 1 = \angle 2$ как соответственные углы при пересечении параллельных прямых A_2B_2 и A_3B_3 секущей a (рис. 44, *б*). Кроме того, $\angle 1 = \angle 3$ (как соответственные углы при пересечении параллельных прямых a и c секущей A_2B_2) и $\angle 2 = \angle 4$ (как соответственные углы при пересечении параллельных прямых a и d секущей A_3B_3). Из этих равенств следует, что $\angle 3 = \angle 4$.

3) $\angle 5 = \angle 6$ как соответственные углы при пересечении параллельных прямых c и d секущей b.

4) Таким образом, $\triangle B_1FB_2 = \triangle B_2OB_3$ по второму признаку равенства треугольников ($B_1F = B_2O$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 5 = \angle 6$). Отсюда следует, что $B_1B_2 = B_2B_3$. Аналогично можно доказать, что $B_2B_3 = B_3B_4$ и т. д.

Теорема доказана.

Замечание. *Теорема Фалеса верна и в том случае, если равные отрезки последовательно откладывать от точки пересечения прямых.*

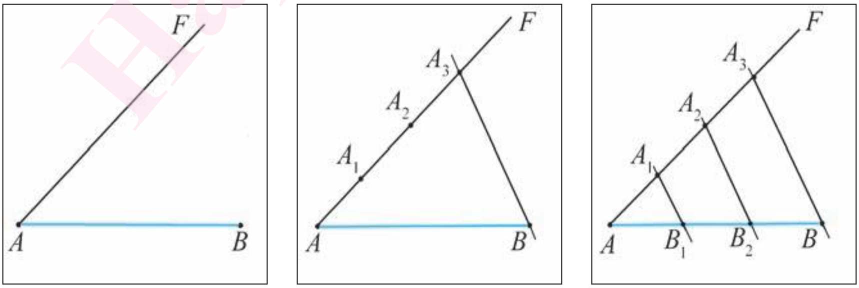
Доказательство проводится аналогично.

Задача (*деление отрезка на n равных частей*). С помощью циркуля и линейки разделите данный отрезок AB на n равных отрезков.

Решение.

Для решения данной задачи воспользуемся теоремой Фалеса.

1) Проведем луч AF, который не лежит на прямой AB (рис. 45, *а*).



а) *б)* *в)*

Рис. 45

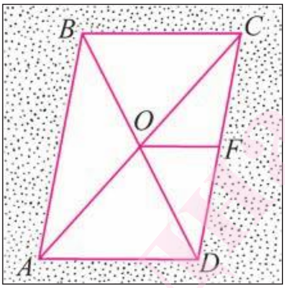
2) От точки A на луче AF отложим последовательно n равных отрезков: $AA_1 = A_1A_2 = \dots = A_{n-1}A_n$ (на рисунке 45, *б* показан случай, когда $n = 3$). Проведем прямую A_nB.

3) Построим прямые, которые проходят через точки A_1, A_2, ... A_{n-1} и параллельны прямой A_nB. Пусть B_1, B_2, ..., B_{n-1} — точки пересечения этих прямых с отрезком AB. Тогда по теореме Фалеса $AB_1 = B_1B_2 = \dots = B_{n-1}B$ (на рисунке 45, *в* показан случай, когда $n = 3$).

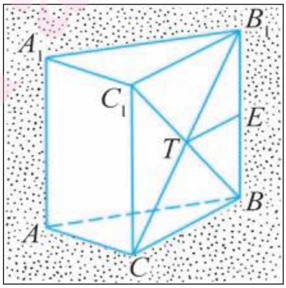
2. Средняя линия треугольника. Дадим определение средней линии треугольника и докажем признак средней линии треугольника и теорему о ее свойствах.

Определение. **Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.**

Любой треугольник имеет три средние линии.



а)



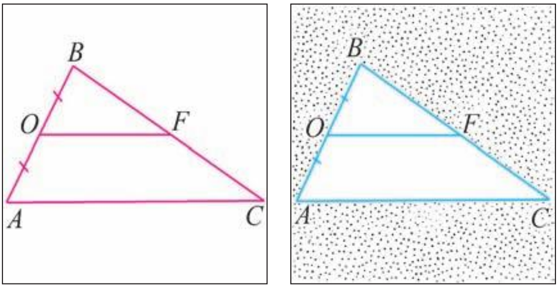
б)

Рис. 46

Например, пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, а точка F — середина стороны CD, тогда отрезок OF — средняя линия треугольников BCD и ACD (рис. 46, *а*).

Если T — точка пересечения диагоналей грани CC_1B_1B прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, а отрезок TE — высота треугольника B_1TB (рис. 46, *б*), тогда отрезок TE есть средняя линия треугольника C_1B_1B. Действительно, точка T — середина отрезка C_1B, так как грань CC_1B_1B есть прямоугольник, а диагонали прямоугольника точкой пересечения делятся пополам. Точка E — середина ребра B_1B, так как высота TE в равнобедренном треугольнике B_1TB, проведенная к его основанию B_1B, является и медианой.

Теорема 2 (*признак средней линии треугольника*). ***Если отрезок параллелен стороне треугольника, а его концы лежат на сторонах так, что один из них есть середина стороны, то отрезок является средней линией треугольника.***



а) *б)*

Рис. 47

Дано:
$\triangle ABC$,
$O \in AB$, $AO = OB$,
$OF \parallel AC$, $F \in BC$
(рис.47, *а*, *б*).

Доказать: OF — средняя линия $\triangle ABC$.

Доказательство.

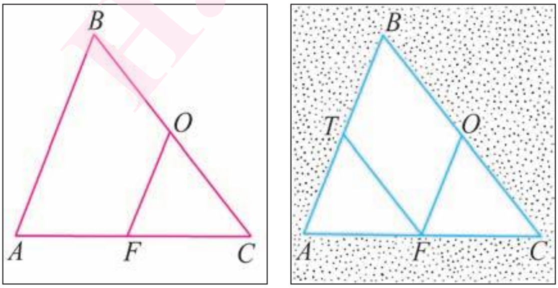
Для доказательства теоремы достаточно доказать, что точка F — середина стороны BC. Для этого воспользуемся теоремой Фалеса.

Так как $AO = OB$ и $OF \parallel AC$, то по теореме Фалеса выполняется равенство $BF = FC$, т. е. точка F — середина стороны. Таким образом, отрезок OF — средняя линия треугольника, так как соединяет середины O и F сторон AB и BC треугольника.

Теорема доказана.

Теперь рассмотрим свойства средней линии треугольника.

Теорема 3 (*о свойствах средней линии треугольника*). ***Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна ее половине.***



а) *б)*

Рис. 48

Дано: $\triangle ABC$,
$O \in BC$, $F \in AC$,
OF — средняя линия (рис. 48, *а*).

Доказать:
$OF \parallel AB$,
$OF = \frac{1}{2} AB$.

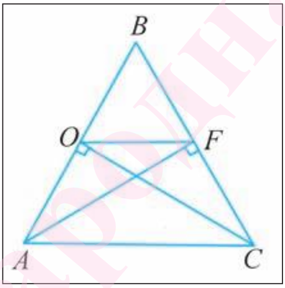
Доказательство.

1) Пусть OF_1 — отрезок, который параллелен стороне AB и $F_1 \in AC$. Тогда по признаку средней линии OF_1 — средняя линия треугольника ABC, т. е. отрезок OF совпадает с отрезком OF_1, а, значит, $OF \parallel AB$.

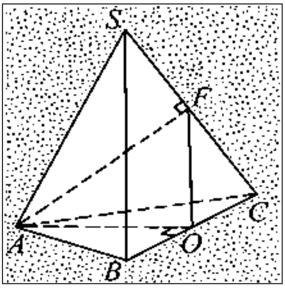
2) Проведем отрезок FT, параллельный стороне BC, тогда $AT = TB$. Так как четырехугольник $OFTB$ — параллелограмм, то $OF = TB$. Таким образом, $OF = TB = AT$, т. е. $OF = \frac{1}{2}AB$ (рис. 48, *б*).

Теорема доказана.

Пусть ABC — равносторонний треугольник, отрезки AF и CO — его высоты (рис. 49, *а*). Тогда $OF \parallel AC$ и $OF = \frac{1}{2}AC$. Действительно, так как треугольник ABC является равносторонним, то его высоты AF и CO являются также и его медианами. Следовательно, точки F и O — середины сторон, а, значит, отрезок OF — средняя линия треугольника ABC. Отсюда по теореме о средней линии треугольника следует, что $OF \parallel AC$ и $OF = \frac{1}{2}AC$.



а)



б)

Рис. 49

Если $SABC$ — тетраэдр, AF и AO — высоты граней ASC и ACB соответственно, то $OF = \frac{1}{2}SB$ (рис. 49, *б*). Каждая грань тетраэдра является равносторонним треугольником, следовательно, высоты AF и AO являются также и медианами граней ASC и ACB соответственно. Следовательно, точки F и O — середины ребер SC и BC. Таким образом, OF — средняя линия грани SCB, а, значит, $OF = \frac{1}{2}SB$.

Вопросы к § 5

1. Сформулируйте теорему Фалеса.

2. Какой отрезок называется средней линией треугольника?

3. Сформулируйте признак средней линии треугольника и докажите его.

4. Какими свойствами обладает средняя линия треугольника?

5. Верно ли, что длина стороны треугольника в два раза больше длины отрезка, соединяющего середины двух других сторон?

Задачи к § 5

99. Докажите, что четырехугольник, вершинами которого являются середины сторон параллелограмма, есть параллелограмм.

100. Докажите, что середины сторон произвольного четырехугольника $ABCD$ являются вершинами параллелограмма.

101. Докажите, что середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.

102. Точки O и F — середины сторон AB и BC треугольника ABC соответственно. Вычислите периметр треугольника ABC, если $P_{OBF} = 7$ см.

103. В равнобедренном треугольнике ABC точки T и O — середины боковых сторон AB и BC соответственно. Вычислите длину отрезка TO, если длина основания треугольника на 2 см больше длины боковой стороны, а периметр треугольника ABC равен 20 см.

104. В параллелограмме $ABCD$ точки K и F — середины сторон AB и AD соответственно, а диагонали пересекаются в точке O. Вычислите периметр параллелограмма, если $OF = 7$ см, а длина отрезка OK на 2 см больше длины отрезка OF.

105. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O, точка F — середина CD. Вычислите длины сторон параллелограмма, если $OF = 5$ см, а $P_{ABCD} = 32$ см.

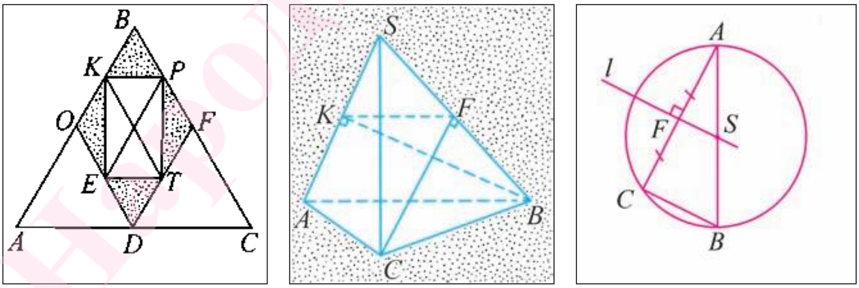
106. Точки K и F — соответственно середины сторон BC и CD ромба $ABCD$, в котором $\angle A = 60°$, а диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что диагонали четырехугольника $KFDO$ взаимно перпендикулярны.

107. $ABCD$ — ромб, диагонали которого пересекаются в точке O, и $\angle BCD = 120°$. Точки T и F — середины сторон AB и BC соответственно. Вычислите периметр четырехугольника $ATFO$, если $CD = 8$ см.

108. Точки O, F и D — середины сторон AB, BC и AC равностороннего треугольника ABC (рис. 50, *а*). Точки K, P, T и E — середины сторон четырехугольника $OBFD$. Докажите, что диагонали четырехугольника $EKPT$ равны.

109. Отрезки CF и BK — высоты соответственно граней SBC и SBA тетраэдра $SABC$ (рис. 50, *б*). Вычислите длину ломаной $ASCB$, если $KF = 2{,}1$ см.

110. В прямоугольнике $ABCD$ диагональ BD делит угол B так, что $\angle ABD = 2\angle CBD$. Вычислите периметр четырехугольника, вершинами которого служат середины сторон прямоугольника, если $CD = 6$ см.



а) *б)* *в)*

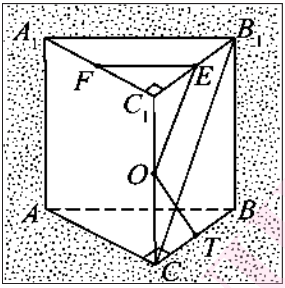
Рис. 50

111. Отрезок AB — диаметр окружности, C — произвольная точка окружности, прямая l — серединный перпендикуляр к хорде AC, который пересекает диаметр AB в точке S. Докажите, что отрезок FS — средняя линия треугольника ABC, где F — точка пересечения прямой l и хорды AC (рис. 50, *в*).

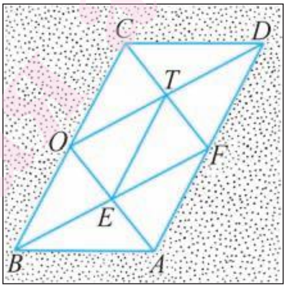
112. $ABCD$ — параллелограмм, точки O и F лежат на лучах BC и AD соответственно так, что $CO = DF$. Точки E и S — точки пересечения диагоналей четырехугольников $ABOF$ и $DCOF$. Докажите, что отрезок ES параллелен стороне AD.

113. $ABCD$ — произвольный выпуклый четырехугольник, точки O, F, T и E — середины соответственно сторон AB, BC, CD и DA. Докажите, что отрезки EF и OT точкой пересечения делятся пополам.

114. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, точки F, E, O и T — середины ребер A_1C_1, C_1B_1, C_1C и CB соответственно (рис. 51, *а*). Вычислите длину ломаной $FEOT$, если $\angle B_1CB = 30°$, $BB_1 = 8$ см и $A_1B_1 = 10$ см.



а)



б)

Рис. 51

115. $ABCD$ — параллелограмм, точки O и F — середины сторон BC и AD соответственно, $E = BF \cap AO$, $T = FC \cap OD$ (рис. 51, *б*). Вычислите длину отрезка ET, если $P_{ABCD} = 30$ см, а длины сторон BC и DC относятся как $2 : 1$.

116. Точка S лежит внутри угла AOB. Постройте отрезок, который делится точкой S пополам, а концы этого отрезка лежат на сторонах данного угла.

§ 6. Трапеция. Средняя линия трапеции

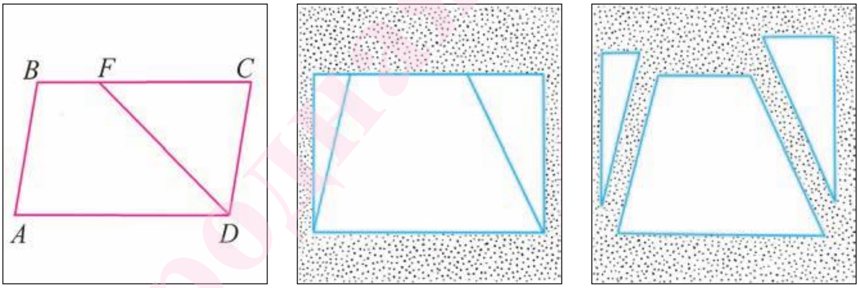
1. Трапеция. Среди множества четырехугольников выделяются такие, у которых две стороны параллельны, а две другие не параллельны.

Определение. **Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны.**

Основаниями трапеции называются ее параллельные стороны, а две другие стороны называются ***боковыми сторонами.***

Чтобы установить, что четырехугольник является трапецией, достаточно доказать параллельность двух сторон и непараллельность двух других сторон.

Например, пусть $ABCD$ — параллелограмм, а точка F — внутренняя точка отрезка BC, тогда четырехугольник $ABFD$ — трапеция, основания которой — отрезки BF и AD, а боковые стороны — отрезки AB и FD (рис. 52, *а*).



а) *б)* *в)*

Рис. 52

Модель трапеции получим, если от листа бумаги прямоугольной формы отрезать два уголка, например, как показано на рисунке 52, *б*, *в*.

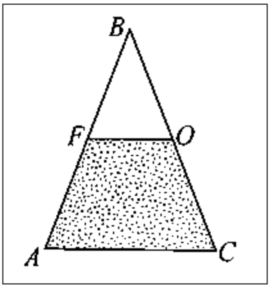
Трапеция называется ***равнобедренной***, если ее боковые стороны равны.

Трапеция называется ***прямоугольной***, если один из ее углов прямой.

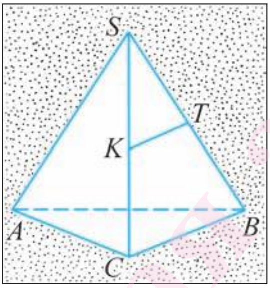
Высотой трапеции называется перпендикуляр (или его длина), проведенный из любой точки прямой, содержащей одно основание, к прямой, содержащей другое основание.

Например, если треугольник ABC равнобедренный, а точки F и O — середины боковых сторон AB и BC соответственно, то четырехугольник $AFOC$ — равнобедренная трапеция (рис. 53, *а*). Действительно, $FO \parallel AC$, так как отрезок FO — средняя линия треугольника ABC, стороны AF и OC не параллельны и $AF = OC = \frac{1}{2}BC$.

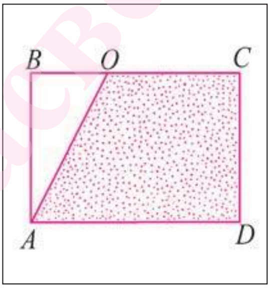
Если точки K и T — середины ребер правильной треугольной пирамиды $SABC$, то четырехугольник $CKTB$ служит примером равнобедренной трапеции, которая лежит в грани SCB (рис. 53, *б*).



а)



б)

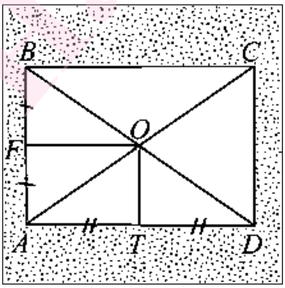


в)

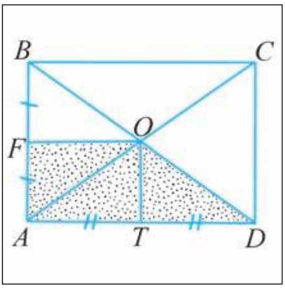
Рис. 53

Если $ABCD$ — прямоугольник, а точка O — внутренняя точка отрезка BC, то четырехугольник $AOCD$ — прямоугольная трапеция (рис. 53, *в*).

Пусть $ABCD$ — прямоугольник, диагонали которого пересекаются в точке O, а точки F и T — середины сторон AB и AD соответственно (рис. 54, *а, б*).



а)

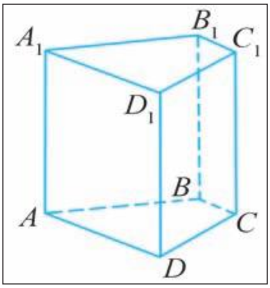


б)

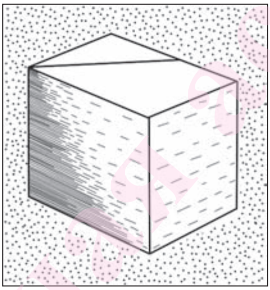
Рис. 54

Тогда, например, отрезки FA и OT — высоты прямоугольной трапеции $AFOD$. Действительно, $FA \perp AD$, так как $ABCD$ — прямоугольник, а $OT \perp AD$, так как медиана OT, проведенная к основанию AD в равнобедренном треугольнике AOD, является высотой.

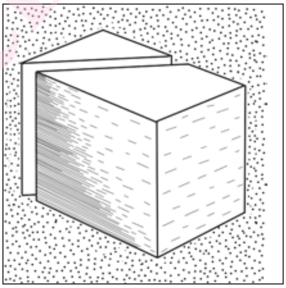
Модель прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, основаниями которой являются прямоугольные трапеции $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 55, *а*), получим, если от деревянного бруска, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, отпилим брусок в форме прямой треугольной призмы, основаниями которой являются прямоугольные треугольники, как показано на рисунке 55, *б*, *в*.



а)



б)



в)

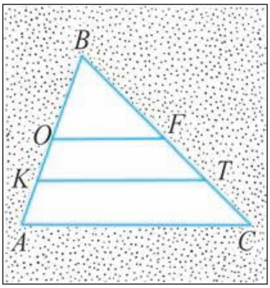
Рис. 55

2. Средняя линия трапеции. Рассмотрим признак и свойства средней линии трапеции.

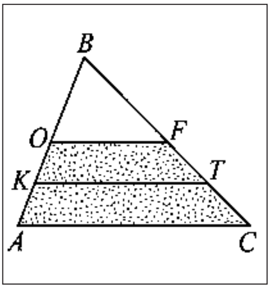
Определение. **Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон.**

Например, пусть ABC — треугольник, точки O и F — соответственно середины сторон AB и BC, а точки K и T — середины отрезков AO и FC соответственно (рис. 56, *а*, *б*). Тогда четырехугольник $AOFC$ — трапеция, а отрезок KT — средняя линия этой трапеции.

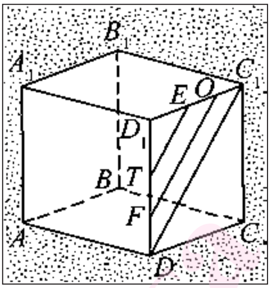
Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, точки T и E — середины ребер DD_1 и C_1D_1, а точки F и O — середины отрезков DT и EC_1 соответственно. Тогда отрезок FO — средняя линия равнобедренной трапеции $DTEC_1$, которая лежит в грани CC_1D_1D. Действительно, $TE \parallel DC_1$, так как отрезок TE — средняя линия треугольника DD_1C_1, а стороны TD и EC_1 не



а)



б)



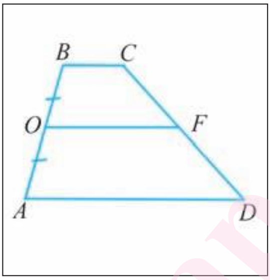
в)

Рис. 56

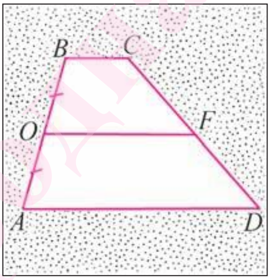
параллельны, т. е. $DTEC_1$ — трапеция. Так как $DT = EC_1$, то трапеция $DTEC_1$ является равнобедренной (рис. 56, *в*).

Докажем теорему, которая позволяет установить, что отрезок является средней линией трапеции.

Теорема 1 (*признак средней линии трапеции*). ***Если отрезок параллелен одному из оснований трапеции, его концы лежат на боковых сторонах, а один из них есть середина стороны, то отрезок является средней линией трапеции.***



а)



б)

Рис. 57

Дано:
$ABCD$ — трапеция,
$O \in AB$, $AO = OB$,
$OF \parallel AD$, $F \in CD$
(рис. 57, *а*, *б*).

Доказать:
OF — средняя линия.

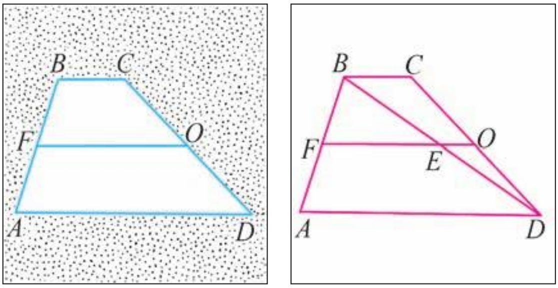
Доказательство.

1) Так как $OF \parallel AD$ и $AD \parallel BC$, то $OF \parallel BC$.

2) Из того, что $AO = OB$, $OF \parallel AD$ и $OF \parallel BC$, по теореме Фалеса следует, что $CF = FD$. Таким образом, отрезок OF — средняя линия трапеции $ABCD$.

Теорема доказана.

Теорема 2 (*о свойствах средней линии трапеции*). ***Средняя линия трапеции параллельна основаниям, а ее длина равна полусумме длин оснований.***



а) *б)*

Рис. 58

Дано:
$ABCD$ — трапеция,
FO — средняя линия (рис. 58, *а, б*).

Доказать:
$FO \parallel AD$, $FO \parallel BC$;
$FO = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

Доказательство.

1) Пусть отрезок, концы которого лежат на боковых сторонах трапеции $ABCD$, проходит через точку F и параллелен основанию AD. Тогда по признаку средней линии трапеции этот отрезок есть средняя линия трапеции $ABCD$, т. е. он совпадает с отрезком FO. Отсюда следует, что $FO \parallel AD$ и $FO \parallel BC$.

2) Проведем диагональ BD трапеции $ABCD$ (см. рис. 58, *б*). Пусть $E = FO \cap BD$.

3) В треугольнике ABD отрезок FE проходит через середину F стороны AB и параллелен прямой AD, следовательно, по признаку средней линии треугольника FE — средняя линия треугольника ABD и $FE = \frac{1}{2}AD$.

4) В треугольнике BCD отрезок OE проходит через середину стороны CD и параллелен BC, значит, по признаку средней линии треугольника OE — средняя линия треугольника BCD и $OE = \frac{1}{2}BC$.

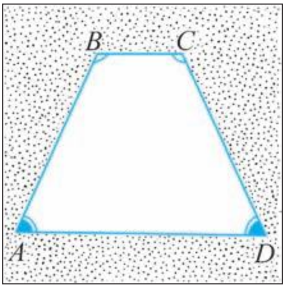
5) Таким образом, $FO = FE + EO = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

Теорема доказана.

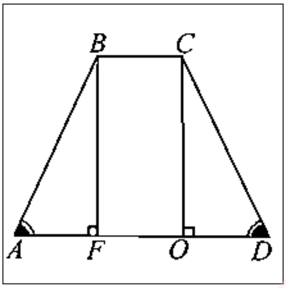
3. Свойства равнобедренной трапеции. Рассмотрим свойства равнобедренной трапеции.

Свойство 1. ***Углы при каждом основании равнобедренной трапеции равны.***

Пусть $ABCD$ — равнобедренная трапеция, боковые стороны которой AB и CD (рис. 59, *а, б*). Докажем, что



а)



б)

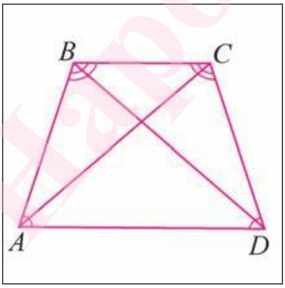
Рис. 59

$\angle BAD = \angle CDA$ и $\angle ABC = \angle BCD$. Пусть BF и CO — перпендикуляры, проведенные из вершин B и C к основанию AD. Тогда прямоугольные треугольники AFB и DOC равны по гипотенузе и катету ($AB = CD$, $BF = CO$). Из равенства этих треугольников следует, что $\angle BAF = \angle CDO$, т. е. $\angle BAD = \angle CDA$. Так как, кроме этого, $\angle ABC = 180° - \angle BAD$ и $\angle BCD = 180° - \angle CDA$, то $\angle ABC = \angle BCD$.

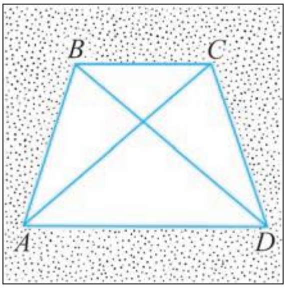
Опираясь на свойство **1**, можно доказать следующее свойство.

Свойство 2. ***Диагонали равнобедренной трапеции равны.***

Если $ABCD$ — равнобедренная трапеция с основаниями BC и AD, то $AC = BD$ (рис. 60, *а*, *б*).



а)



б)

Рис. 60

Действительно, $AC = BD$, так как треугольники ADC и DAB равны по двум сторонам и углу между ними ($AB = CD$, AD — общая сторона, $\angle BAD = \angle CDA$).

Вопросы к § 6

1. Какой четырехугольник называется трапецией?

2. Какие стороны трапеции называются основаниями (боковыми сторонами)?

3. Какая трапеция называется равнобедренной (прямоугольной)?

4. Что называется высотой трапеции?

5. Верно ли, что сумма градусных мер углов, прилежащих к каждой из боковых сторон трапеции, равна 180°?

6. Какой отрезок называется средней линией трапеции?

7. Какими свойствами обладает средняя линия трапеции?

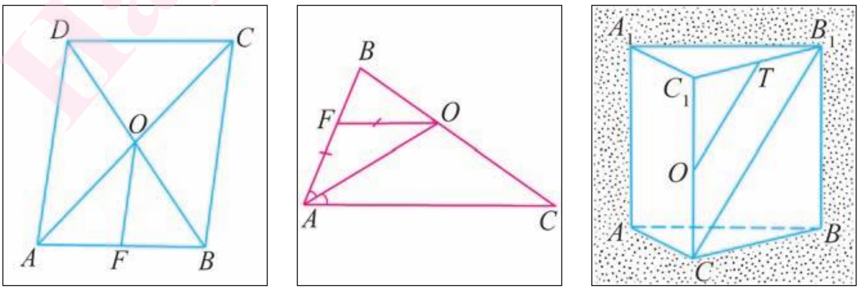
8. Сформулируйте признак средней линии трапеции.

9. Какими свойствами обладает равнобедренная трапеция?

Задачи к § 6

117. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, диагонали которого пересекаются в точке O, точка F — середина стороны AB (рис. 61, *а*). Докажите, что четырехугольник $AFOD$ — трапеция.

118. Точки O и F лежат соответственно на сторонах BC и AB треугольника ABC так, что $AF = FO$ и AO — биссектриса угла BAC (рис. 61, *б*). Верно ли, что четырехугольник $AFOC$ является трапецией?



а) *б)* *в)*

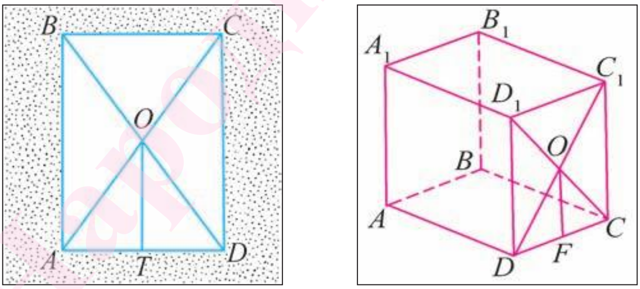
Рис. 61

119. Точки O и T — середины ребер CC_1 и C_1B_1 прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ соответственно. Докажите, что четырехугольник $COTB_1$ — трапеция. Вычислите длину основания OT этой трапеции, если основание призмы есть равносторонний треугольник, длина стороны которого равна 5 см и $\angle B_1CB = 60°$ (рис. 61, *в*).

120. Точки O и F — середины сторон BC и AC равностороннего треугольника ABC соответственно. Вычислите периметр трапеции $ABOF$, если $P_{ABC} = 12$ см.

121. В равнобедренном треугольнике ABC, основание которого AC, точка O — середина боковой стороны BC, отрезок OT — медиана треугольника AOC. Вычислите периметр трапеции $ABOT$, если периметр треугольника ABC равен 17 см, а длина боковой стороны на 1 см больше длины его основания.

122. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, точка T — середина стороны AD (рис. 62, *а*). Докажите, что четырехугольник $TOCD$ — трапеция, и найдите ее высоту, если $AC = a$ и $\angle BCA = 60°$.



а) *б)*

Рис. 62

123. Диагонали DC_1 и CD_1 грани DD_1C_1C прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке O, точка F — середина ребра DC (рис. 62, *б*). Докажите, что четырехугольник FOC_1C, лежащий в грани DD_1C_1C, является трапецией, и вычислите длину отрезка D_1C, если высота трапеции FOC_1C равна 2 см, а $\angle DC_1C = 30°$.

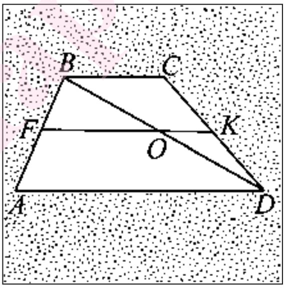
124. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, точка F — середина стороны CD. Докажите, что четырехугольник $AOFD$ — трапеция, и вычислите длину ее средней линии, если $BD = 8$ см, $\angle ACD = 30°$.

125. Отрезки CE и AF — медианы, проведенные соответственно к боковым сторонам AB и BC равнобедренного треугольника ABC. Докажите, что четырехугольник $AEFC$ — трапеция, и вычислите длину ее средней линии, если $AC = 6$ см.

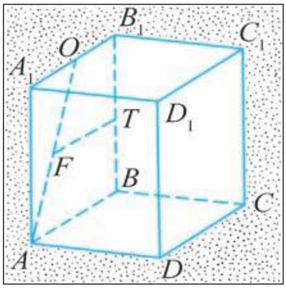
126. Длины оснований BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 6 см и 10 см. Вычислите длины отрезков FO и OK, на которые диагональ BD делит среднюю линию FK трапеции (рис. 63, *а*).

127. Длина большего основания трапеции равна 10 см. Диагональ трапеции делит ее среднюю линию на отрезки, длина одного из которых на 4 см больше длины другого. Вычислите длину меньшего основания трапеции.

128. Основаниями прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служат квадраты, точки O и T — середины ребер A_1B_1 и BB_1 соответственно, а точка F — середина отрезка AO (рис. 63, *б*). Вычислите длину отрезка FT, если длина стороны основания данного параллелепипеда равна 6 см.



а)



б)

Рис. 63

129. Длина средней линии трапеции равна 20 см. Вычислите длины оснований трапеции, если они относятся как 1 : 3.

130. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD луч AC является биссектрисой угла BAD. Вычислите длину средней линии трапеции, если $AB = 3$ см, а разность длин оснований трапеции равна 5 см.

131. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD длина средней линии равна 9 см. Точка F лежит на основании AD так, что $BF \parallel CD$. Вычислите длины оснований трапеции, если $AF = 2$ см.

132. $ABCD$ — равнобедренная трапеция с боковыми сторонами AB и CD. Вычислите длину средней линии трапеции, если длины большего основания и боковой стороны соответственно равны 14 см и 8 см, а угол при меньшем основании равен $120°$.

133. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O. Точка F — середина стороны BC. Вычислите расстояние между серединами отрезков AO и BF, если острый угол ромба равен $60°$, а длина его меньшей диагонали равна 8 см.

134. $ABCD$ — квадрат, а точка F лежит на луче AD так, что отрезок DF в два раза больше отрезка AD. Вычислите высоту трапеции $ABCF$, если расстояние между серединами отрезков AB и CF равно 18 см.

135. В прямоугольной трапеции острый угол равен $45°$, а длины меньшей боковой стороны и меньшего основания равны по 6 см. Вычислите длину средней линии трапеции.

136. В прямоугольной трапеции $ABCD$ острый угол BAD равен $60°$. Найдите длину меньшего основания трапеции, если $AB = AD = a$.

137. Длина меньшего основания BC прямоугольной трапеции $ABCD$ равна 8 см. Вычислите длину большего основания трапеции, если угол ABC равен $120°$, а вершина D лежит на серединном перпендикуляре к стороне AB.

138. Постройте прямоугольную трапецию по меньшему основанию a и боковым сторонам c и b $(b > c)$.

139. Постройте равнобедренную трапецию по боковой стороне a, большему основанию b и высоте h трапеции.

140. Диагональ равнобедренной трапеции составляет с боковой стороной угол $120°$ и лежит на биссектрисе угла при большем основании трапеции. Вычислите градусные меры углов трапеции.

141. $ABCD$ — равнобедренная трапеция, боковая сторона AB которой равна меньшему основанию BC и в два раза меньше большего основания. Докажите, что треугольник ACD является прямоугольным.

142. В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны. Вычислите длину основания BC, если $\angle BAC = 30°$, $AD = 6$ см.

143. Средняя линия трапеции делит ее на две трапеции, длины средних линий которых равны 5 см и 9 см. Вычислите длины оснований трапеции.

144. Докажите, что если в равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, то ее средняя линия равна высоте трапеции.

145. Постройте равнобедренную трапецию по острому углу α, диагонали a и высоте h.

146. Постройте трапецию по большему основанию a, боковой стороне b, углу между ними α и диагонали m, проходящей через общую вершину стороны b и основания a трапеции.

147. Постройте трапецию по двум диагоналям d_1 и d_2, углу α между ними и боковой стороне a.

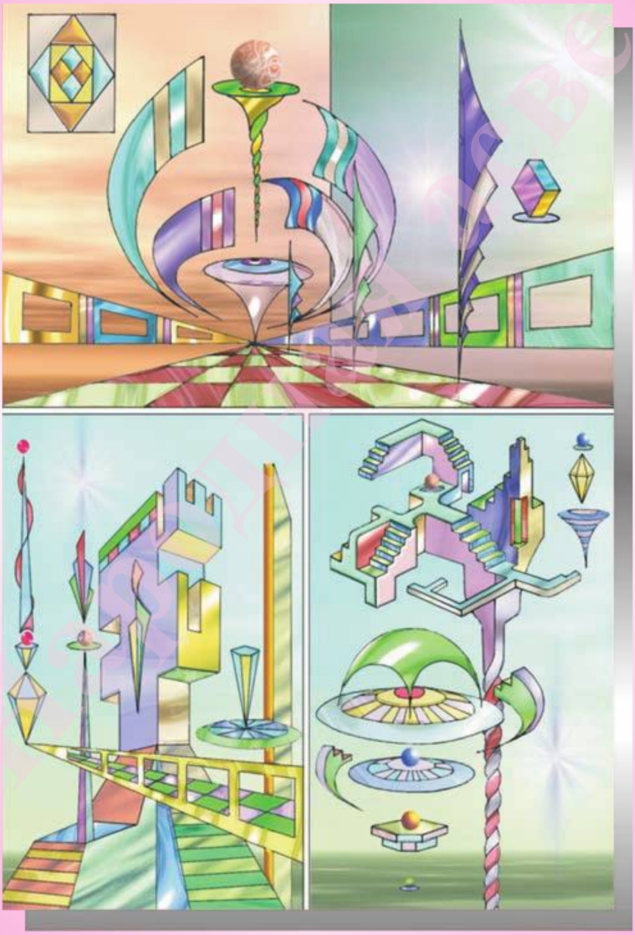
148. Постройте трапецию по четырем сторонам a, b, c, d.

149. Постройте ромб по стороне a и сумме s его диагоналей.

150. Постройте ромб по стороне a и разности m его диагоналей.

2

ПЛОЩАДЬ ФИГУРЫ

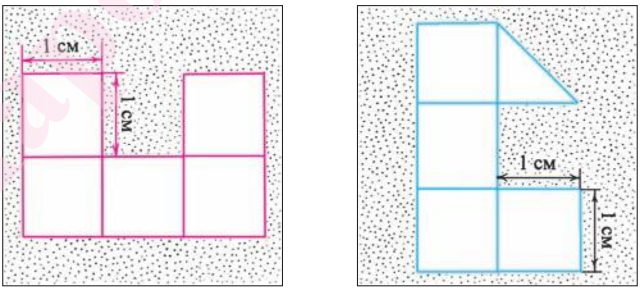


Глава 2
ПЛОЩАДЬ ФИГУРЫ

§ 1. Понятие площади. Площадь прямоугольника

1. Понятие площади. В повседневной практической деятельности человек достаточно часто пользуется понятием площади. Так в процессе проведения строительных или ремонтных работ площадь учитывается при подсчете необходимого количества строительных материалов. Например, знание площади пола комнаты учитывается при определении площади паркета, необходимого для покрытия пола и т. д. Довольно часто требуется измерить площадь участка поверхности, имеющего форму некоторого многоугольника. В данной главе будет рассмотрен вопрос о вычислении площадей различных многоугольников.

Аналогично измерению длин отрезков измерение площади многоугольника осуществляется с помощью выбранной единицы измерения. *За единицу измерения площади принимается квадрат, сторона которого равна единице измерения отрезков.* Например, если за единицу измерения отрезков принят 1 см, то за единицу измерения площадей принимается квадрат со стороной 1 см. Такой квадрат называется квадратным сантиметром и обозначается см^2. Площадь может измеряться также в квадратных метрах (м^2), квадратных километрах (км^2), квадратных миллиметрах (мм^2) и т.д.



а) *б)*

Рис. 64

Площадь многоугольника выражается положительным числом, которое показывает, сколько раз единица измерения и ее части укладываются в данном многоугольнике.

Например, если за единицу измерения площадей принят квадрат в 1 см^2, то для определения площади многоугольника необходимо узнать, сколько раз в данном многоугольнике укладывается квадратный сантиметр. Например, на рисунке 64, *а* изображен восьмиугольник, в котором квадратный сантиметр укладывается ровно пять раз, значит, его площадь равна 5 см^2. В восьмиугольнике, изображенном на рисунке 64, *б*, квадратный сантиметр укладывается четыре с половиной раза, следовательно, площадь этого восьмиугольника равна 4,5 см^2.

Площадь многоугольника F обозначается S_F.

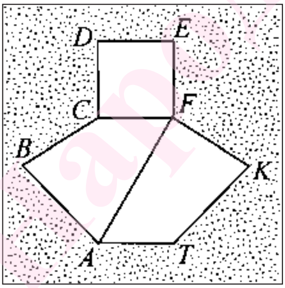
При измерении площадей пользуются следующими *аксиомами площади*.

1) *Каждый многоугольник имеет площадь, которая выражается некоторым положительным числом.*

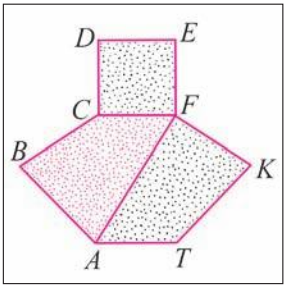
2) *Площадь квадрата, сторона которого равна а единиц измерения длины, равна a^2.*

3) *Равные многоугольники имеют равные площади* (если $F_1 = F_2$, то $S_{F_1} = S_{F_2}$).

4) *Если многоугольник представляет собой объединение многоугольников, каждые два из которых не имеют общих внутренних точек, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.*



а)



б)

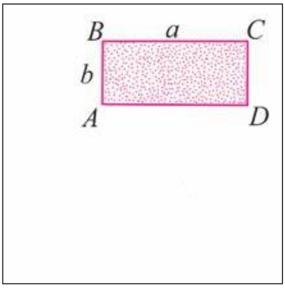
Рис. 65

Например, площадь восьмиугольника $ABCDEFKT$, изображенного на рисунке 65, *а*, *б*, равна сумме площадей квадрата $CDEF$ и четырехугольников $ABCF$, $AFKT$.

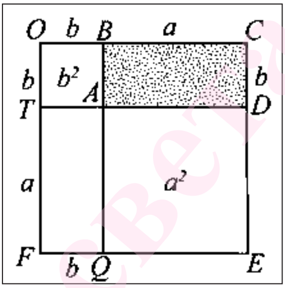
Геометрические фигуры называются ***равновеликими***, если они имеют равные площади.

2. Площадь прямоугольника. Рассмотрим вопрос о вычислении площади прямоугольника. Докажем, что площадь прямоугольника равна произведению длин его смежных сторон.

Теорема (*о площади прямоугольника*). ***Площадь прямоугольника равна произведению длин его смежных сторон.***



а)



б)

Рис. 66

Доказательство.

1) Пусть дан прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = b$ и $BC = a$, площадь которого равна S (рис. 66, *а*). Докажем, что $S = ab$.

2) Достроим этот прямоугольник до квадрата $FOCE$ со стороной $a + b$, как показано на рисунке **66**, *б*. По аксиоме **2** площадь этого квадрата равна $(a + b)^2$.

3) Построенный квадрат является объединением данного прямоугольника $ABCD$, равного ему прямоугольника $FTAQ$ и двух квадратов $TOBA$ и $QADE$, площади которых соответственно равны b^2 и a^2.

4) Площадь каждого из прямоугольников $ABCD$ и $FTAQ$ равна S. По аксиоме **4** выполняется равенство $(a + b)^2 = S + S + a^2 + b^2$, или $a^2 + 2ab + b^2 = S + S + a^2 + b^2$. Отсюда получим, что $S = ab$.

Теорема доказана.

Вопросы к § 1

1. Сформулируйте аксиомы площади.

2. Сформулируйте теорему о площади прямоугольника.

3. Какие вы знаете единицы измерения площади?

4. Какие фигуры называются равновеликими?

Задачи к § 1

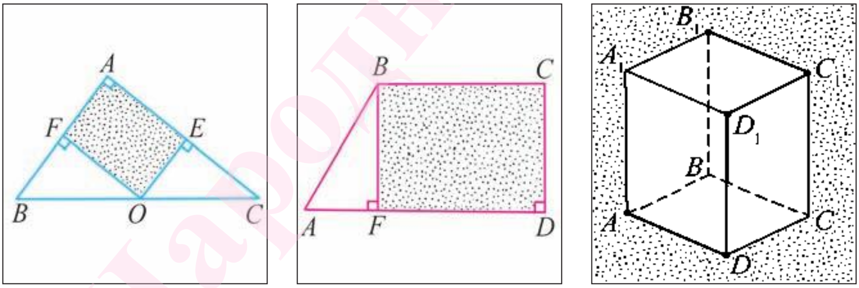
151. Вычислите площадь прямоугольника, если его периметр равен 16 см, а длина одной из его сторон равна 2 см.

152. Вычислите периметр прямоугольника, если его площадь равна 32 см^2, а одна из сторон в два раза больше другой.

153. Вычислите площадь прямоугольника, если его периметр равен 30 см, а длины сторон относятся как 1 : 4.

154. Длины диагоналей ромба равны 10 см и 6 см. Вычислите площадь четырехугольника, вершинами которого служат середины сторон ромба.

155. Точка O — середина гипотенузы BC прямоугольного треугольника ABC, OF и OE — перпендикуляры, проведенные из точки O соответственно к прямым AB и AC (рис. 67, *а*). Вычислите площадь четырехугольника $OFAE$, если $AB = 6$ см, $AC = 8$ см.



а) *б)* *в)*

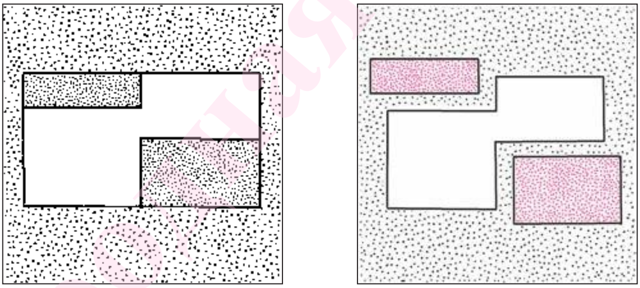
Рис. 67

156. Высота прямоугольной трапеции $ABCD$ равна 4 см, отрезок BF — перпендикуляр, проведенный из вершины B к прямой AD (рис. 65, *б*). Вычислите площадь четырехугольника $FBCD$, если периметр трапеции равен 24 см, разность длин ее оснований равна 3 см, а длина большей боковой стороны — 5 см.

157. Основаниями прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служат квадраты. Вычислите площадь боковой грани параллелепипеда, если известно, что площадь основания равна 36 см^2, а длина ломаной $ADD_1C_1B_1$ равна 25 см (рис. 67, *в*).

158. Длины сторон AB и BC параллелограмма $ABCD$ равны соответственно 8 см и 10 см. Отрезки BF и CE — перпендикуляры, проведенные соответственно из вершин B и C к прямой AD. Вычислите площадь четырехугольника $FBCE$, если $\angle BAD = 30°$.

159. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O, а точка F — середина стороны AB; FE и OT — перпендикуляры, проведенные из точек F и O к прямой AD. Вычислите площадь четырехугольника $EFOT$, если $BC = 16$ см, а расстояние между прямыми BC и AD равно 10 см.



а) *б)*

Рис. 68

160. От листа жести, имеющего форму прямоугольника, длины сторон которого 100 см и 80 см, отрезали две части прямоугольной формы, как показано на рисунке 68, *а*, *б*. Вычислите площадь оставшейся части листа жести, если длины сторон одной из отрезанных частей равны 50 см и 20 см, а другой — 50 см и 40 см.

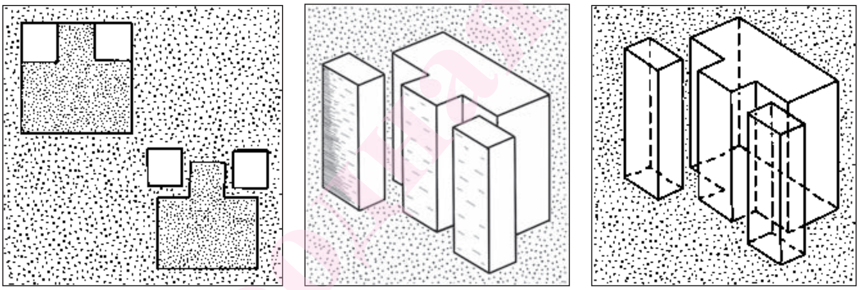
161. Сколько необходимо кафельных плиток прямоугольной формы, длины сторон которых равны 20 см и 10 см, для облицовки части стены, имеющей форму прямоугольника с длинами сторон 5 м и 4 м?

162. Сторона прямоугольника в два раза больше другой его стороны. Вычислите расстояния от точки пересечения диагоналей прямоугольника до прямых, содержащих его стороны, если площадь прямоугольника равна 32 см^2.

163. Чему равно отношение площадей прямоугольников, если длины сторон одного из прямоугольников в три раза больше длин сторон другого прямоугольника?

164. Как изменится площадь прямоугольника, если длину одной его стороны увеличить в три раза, а длину другой увеличить в пять раз?

165. От листа фанеры квадратной формы отрезаны две равные части, каждая из которых также имеет форму квадрата (рис. 69, *а*). Вычислите площадь оставшейся части, если длина стороны каждой из отпиленных частей в три раза меньше длины стороны листа фанеры и имеет площадь 100 см^2.



а) *б)* *в)*

Рис. 69

166. От деревянного бруска, имеющего форму куба, отпилены две части в форме прямоугольного параллелепипеда (рис. 69, *б*). Основаниями отпиленных частей служат квадраты, стороны каждого из которых в три раза меньше ребра куба, а их площади равны по 36 см^2. Вычислите сумму площадей всех боковых граней полученной модели прямой восьмиугольной призмы (рис. 69, *в*).

167. Биссектриса угла B прямоугольника $ABCD$ пересекает сторону AD в точке F так, что $AF = 4$ см и $FD = 6$ см. Вычислите площадь данного прямоугольника.

168. $ABCD$ — прямоугольная трапеция с прямым углом при вершине D, $\angle BAD = 30°$, BF — перпендикуляр, проведенный из вершины B к прямой AD. Вычислите площадь прямоугольника $FBCD$, если диагональ AC трапеции является биссектрисой угла BAD, а длина большей боковой стороны — 8 см.

169. Расстояние от точки пересечения диагоналей прямоугольника до стороны в три раза больше, чем длина этой стороны. Вычислите площадь прямоугольника, если его периметр равен 56 см.

170. Докажите, что площадь квадрата равна половине квадрата длины его диагонали.

171. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны. Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого служат середины сторон трапеции, если средняя линия трапеции равна a.

172. Вычислите площадь четырехугольника, вершинами которого служат точки пересечения диагоналей квадратов, построенных на сторонах данного прямоугольника и не имеющих общих внутренних точек, если площади квадратов равны 16 см^2 и 36 см^2.

173. Площадь шестиугольника, вершинами которого служат середины сторон и две противолежащие вершины прямоугольника, равна 36 см^2. Вычислите площадь этого прямоугольника.

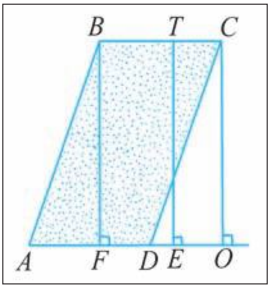
174. Докажите, что площадь ромба равна половине произведения длин его диагоналей.

§ 2. Площадь параллелограмма и треугольника

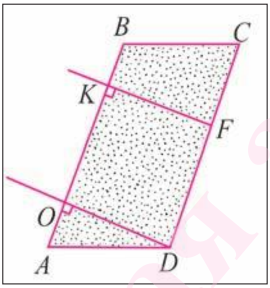
В этом параграфе рассмотрим формулы для вычисления площади параллелограмма и площади треугольника.

1. Площадь параллелограмма.

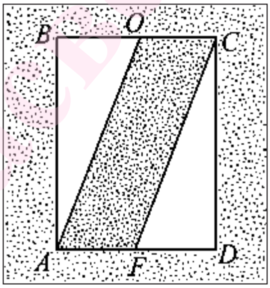
Высотой параллелограмма, проведенной к стороне, называется перпендикуляр (или его длина), проведенный из любой точки противолежащей стороны к прямой, содержащей эту сторону.



а)



б)



в)

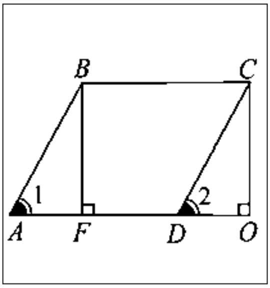
Рис. 70

Например, пусть $ABCD$ — параллелограмм. Тогда каждый из перпендикуляров BF, TE и CO, проведенных соответственно из точек B, T и C к прямой, содержащей сторону AD, является высотой параллелограмма $ABCD$, проведенной к этой стороне (рис. 70, *а*).

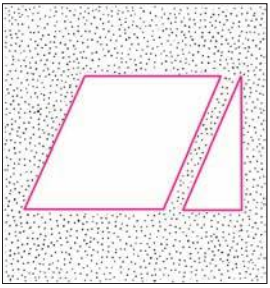
Перпендикуляры DO и FK, проведенные соответственно из точек D и F к прямой, содержащей сторону AB, являются высотами параллелограмма $ABCD$, проведенными к стороне AB (рис. 70, *б*).

Пусть $ABCD$ — прямоугольник, а точки O и F — середины сторон BC и AD соответственно (рис. 70, *в*). Тогда отрезок CD — высота параллелограмма $AOCF$, проведенная к стороне AF, а отрезок AB — высота, проведенная к стороне OC.

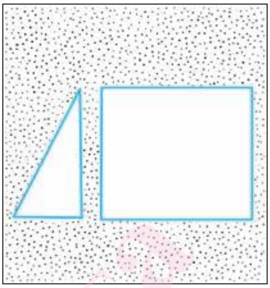
Теорема 1 (*о площади параллелограмма*). ***Площадь параллелограмма равна произведению длины стороны на высоту, проведенную к ней.***



а)



б)



в)

Рис. 71

Доказательство.

1) Пусть $ABCD$ — параллелограмм, BF — высота этого параллелограмма, проведенная к стороне AD (рис. 71, *а*). Докажем, что площадь S параллелограмма $ABCD$ вычисляется по формуле $S = AD \cdot BF$.

2) Проведем высоту CO к стороне AD, тогда четырехугольник $FBCO$ является прямоугольником. Докажем, что площадь параллелограмма $ABCD$ равна площади прямоугольника $FBCO$ (см. рис. 71, *а*).

3) Треугольники AFB и DOC равны по гипотенузе и острому углу ($AB = DC$ и $\angle 1 = \angle 2$ как соответственные углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей AD), следовательно, равны их площади, т. е. $S_{AFB} = S_{DOC}$.

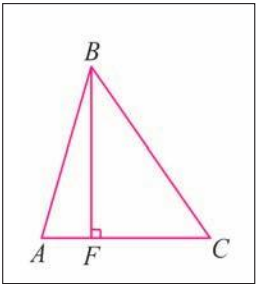
4) Так как трапеция $ABCO$ составлена из параллелограмма $ABCD$ и треугольника DOC, то $S_{ABCD} = S_{ABCO} - S_{DOC}$. Кроме того, трапеция $ABCO$ представляет собой объединение треугольника AFB и прямоугольника $FBCO$, следовательно, $S_{FBCO} = S_{ABCO} - S_{AFB}$. Поскольку $S_{AFB} = S_{DOC}$, то $S_{ABCD} = S_{FBCO}$ (рис. 71, *а*, *б*, *в*).

5) По теореме о площади прямоугольника $S_{FBCO} = BC \cdot BF$, следовательно, $S_{ABCD} = S_{FBCO} = BC \cdot BF$. Так как $BC = AD$, то $S_{ABCD} = AD \cdot BF$.

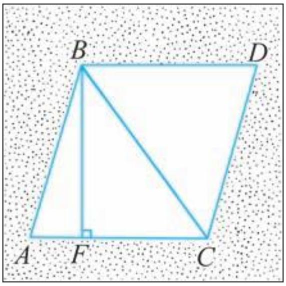
Теорема доказана.

2. Площадь треугольника. Рассмотрим вопрос о нахождении площади треугольника. Напомним, что высотой треугольника называется перпендикуляр (или длина перпендикуляра), проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противолежащую сторону треугольника.

Теорема 2 (*о площади треугольника*). ***Площадь треугольника равна половине произведения длины стороны на высоту, проведенную к ней.***



а)



б)

Рис. 72

Дано: $\triangle ABC$, $BF \perp AC$, $F \in AC$ (рис. 72, *а*).

Доказать: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BF$.

Доказательство.

1) Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$, как показано на рисунке 72, *б*.

2) Треугольники ABC и DCB равны по трем сторонам ($AB = DC$ и $AC = BD$ как противолежащие стороны параллелограмма, BC — общая сторона), следовательно, $S_{ABC} = S_{DCB}$.

3) Таким образом, $S_{ABDC} = 2S_{ABC}$. Отсюда следует, что $S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABDC} = \frac{1}{2} AC \cdot BF$.

Теорема доказана.

Из данной теоремы получим следующие следствия.

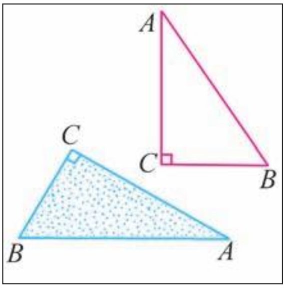
Следствие 1. ***Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения длин его катетов.***

Действительно, например, катет AC прямоугольного треугольника ACB является высотой, проведенной к катету BC. Следовательно, на основании доказанной теоремы получим, что площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения длин его катетов (рис. 73, *а*).

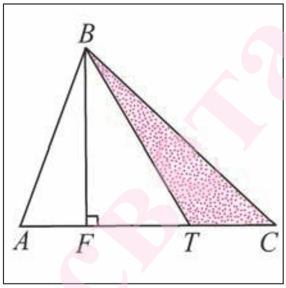
Следствие 2. ***Если высота одного треугольника равна высоте другого треугольника, то их площади относятся как длины сторон, к которым проведены высоты.***

Например, пусть точка T лежит на основании AC треугольника ABC так, что $AT : TC = 2 : 1$, тогда $S_{ABT} : S_{BTC} = 2 : 1$ (рис. 73, *б*).

Действительно, пусть BF — перпендикуляр, проведенный из вершины B к прямой AC, тогда отрезок BF — высота каждого из треугольников ABT и TBC. Следовательно, $S_{ABT} = \frac{1}{2}AT \cdot BF$ и $S_{BTC} = \frac{1}{2}TC \cdot BF$ и $S_{ABT} : S_{BTC} = AT : TC = 2 : 1$.



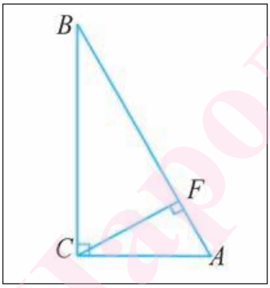
а)



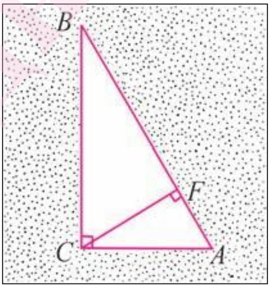
б)

Рис. 73

Задача 1. Длины катетов AC и BC прямоугольного треугольника ABC равны соответственно m и n, а длина гипотенузы равна c. Найдите высоту CF, проведенную к гипотенузе AB (рис. 74, *а, б*).



а)



б)

Рис. 74

Дано:
$\triangle\ ABC$,
$\angle ACB = 90°$,
$AC = m$, $BC = n$,
$AB = c$, $CF \perp AB$,
$F \in AB$.

Найти: CF.

Решение.

Воспользуемся тем, что площадь треугольника равна половине произведения длины стороны и высоты, проведенной к этой стороне.

1) Треугольник ABC — прямоугольный, следовательно, его площадь равна половине произведения длин его катетов, т. е. $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}m \cdot n$.

2) Кроме того, площадь прямоугольного треугольника ABC равна произведению длины его гипотенузы на высоту, проведенную к ней, т. е.

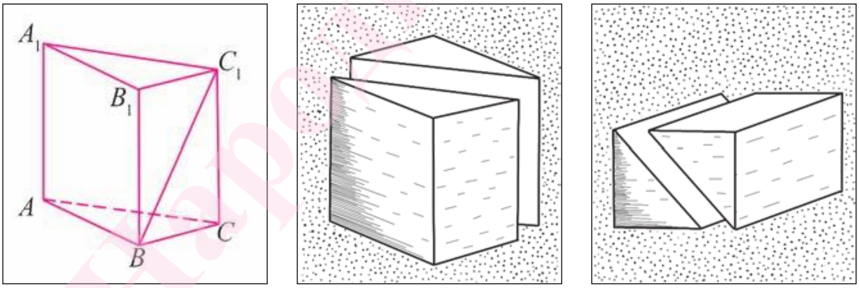
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot CF = \frac{1}{2}c \cdot CF.$$

3) Таким образом, из равенства $\frac{1}{2}m \cdot n = \frac{1}{2}c \cdot CF$ найдем

$$CF = \frac{m \cdot n}{c}.$$

Ответ: $\frac{m \cdot n}{c}$.

Задача 2. $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма, основанием которой служит прямоугольный равнобедренный треугольник ABC с прямым углом при вершине B (рис. 75, *а*). Представление о такой призме дают модели, которые получатся, если модель прямоугольного параллелепипеда, основанием которого служит квадрат, распилить вдоль ребра, как показано на рисунке 75, *б*, *в*. Вычислите площадь основания призмы, если $BC_1 = 12$ см, $\angle B_1BC_1 = 30°$.



а) *б)* *в)*

Рис. 75

Решение.

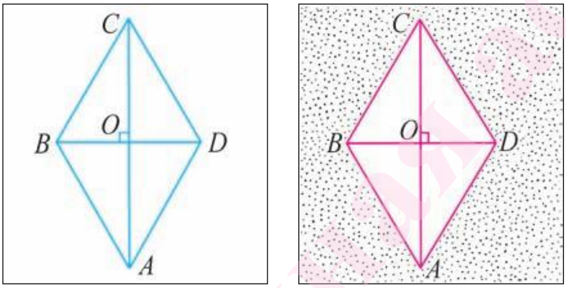
Основанием данной призмы служит равнобедренный прямоугольный треугольник. Так как площадь любого прямоугольного треугольника равна половине произведения длин его катетов, то для вычисления площади основания призмы необходимо знать длину катета треугольника ABC.

1) Призма $ABCA_1B_1C_1$ является прямой призмой, следовательно, ее боковыми гранями служат прямоугольники. Таким образом, треугольник BB_1C_1 является прямоугольным с прямым углом при вершине B_1. Катет B_1C_1 лежит против угла в 30°, значит, $B_1C_1 = \frac{1}{2}BC_1 = 6$ см, $A_1B_1 = B_1C_1 = 6$ см.

2) Теперь найдем $S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}A_1B_1 \cdot B_1C_1 = \frac{1}{2}6 \cdot 6 = 18$ (см^2).

Ответ: 18 см^2.

Задача 3. Докажите, что площадь ромба $ABCD$ равна половине произведения длин его диагоналей, т. е. $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$.



а) б)

Рис. 76

Дано:
$ABCD$ — ромб.

Доказать:
$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$.

Доказательство.

Ромб $ABCD$ разбивается диагоналями на четыре попарно равных прямоугольных треугольника. Следовательно, площадь ромба равна сумме площадей этих треугольников (рис. 76, *а*, *б*).

1) Пусть O — точка пересечения диагоналей ромба. Тогда $S_{ABCD} = 4S_{BOC}$. Так как треугольник BOC является прямоугольным, то его площадь равна половине произведения длин катетов, т. е. $S_{BOC} = \frac{1}{2}BO \cdot OC$.

2) Теперь $S_{ABCD} = 4S_{BOC} = 4 \cdot \frac{1}{2}OC \cdot BO = \frac{1}{2}(2OC \cdot 2BO) =$
$= \frac{1}{2}AC \cdot BD$.

Что и требовалось доказать.

Вопросы к § 2

1. Выведите формулу площади параллелограмма.

2. Сформулируйте теорему о площади треугольника.

3. Чему равна площадь прямоугольного треугольника, если известны длины его катетов?

4. Приведите примеры неравных треугольников, имеющих равные площади.

5. Чему равна площадь параллелограмма, если известна длина его стороны и высота, проведенная к ней?

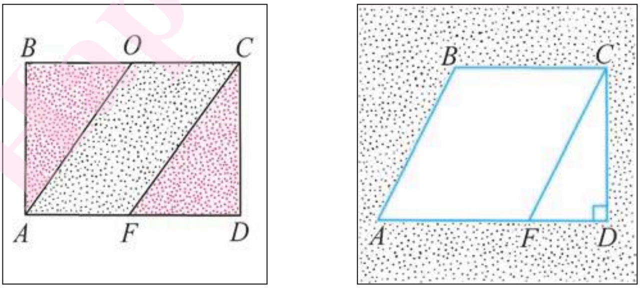
6. Чему равно отношение площадей треугольников, если высота одного треугольника равна высоте другого треугольника?

Задачи к § 2

175. В параллелограмме $ABCD$ длина стороны AB равна 6 см, а высота, проведенная к этой стороне, равна 5 см. Вычислите площадь параллелограмма.

176. Длина стороны параллелограмма равна 9 см, а высота, проведенная к этой стороне, меньше ее на 5 см. Вычислите площадь параллелограмма.

177. Точки O и F — середины сторон BC и AD прямоугольника $ABCD$ соответственно. Вычислите площадь параллелограмма $AOCF$, если $AB = 5$ см, $AD = 16$ см (рис. 77, *а*).



а) *б)*

Рис. 77

178. $ABCD$ — прямоугольная трапеция с прямым углом при вершине D, а точка F лежит на основании AD так, что отрезки AB и CF параллельны. Вычислите площадь четырехугольника $ABCF$, если $BC = 5$ см, $CD = 4$ см (рис. 77, *б*).

179. Длина стороны AB параллелограмма $ABCD$ равна 8 см. Вычислите высоту, проведенную к этой стороне, если площадь параллелограмма равна 12 см^2.

180. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 25 см^2. Вычислите расстояние от вершины B до прямой AD, если $BC = 10$ см.

181. Высота, проведенная из вершины A к прямой, содержащей сторону CD параллелограмма $ABCD$, равна 7 см, а его площадь равна 35 см^2. Вычислите длину стороны AB.

182. Расстояние от вершины D параллелограмма $ABCD$ до прямой AB равно 10 см, а площадь параллелограмма равна 30 см^2. Вычислите длину стороны CD.

183. Длины сторон параллелограмма равны 10 см и 6 см, а высота, проведенная к большей стороне, — 3 см. Вычислите высоту, проведенную к меньшей стороне параллелограмма.

184. Высоты, проведенные к сторонам AD и AB параллелограмма $ABCD$, равны 2 см и 3 см соответственно. Вычислите длину стороны AB, если $AD = 9$ см.

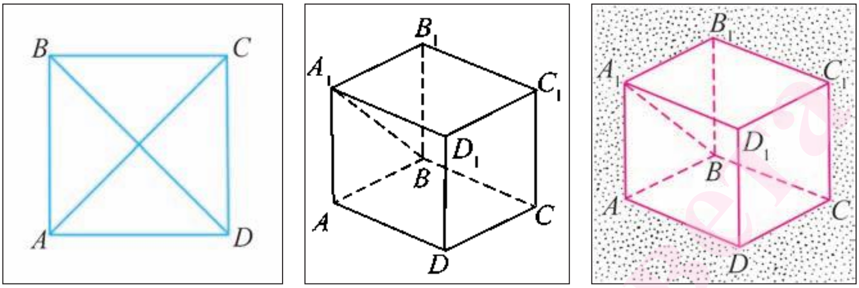
185. Вычислите длину стороны ромба, если его площадь равна 16 см^2, а высота — 4 см.

186. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O. Вычислите длину стороны ромба, если его площадь равна 30 см^2, а высота треугольника OCD, проведенная из вершины O, равна 3 см.

187. Длина диагонали ромба равна 12 см. Вычислите площадь ромба, если вторая диагональ в три раза меньше данной диагонали.

188. Площадь ромба $ABCD$ равна 40 см^2, а длина одной из диагоналей равна 10 см. Вычислите длину другой диагонали ромба.

189. Докажите, что площадь квадрата $ABCD$ равна половине квадрата длины его диагонали, т. е. $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC^2 = \frac{1}{2}BD^2$ (рис. 78, *а*).



а) *б)* *в)*

Рис. 78

190. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Вычислите площадь поверхности куба, т. е. сумму площадей всех его граней, если $A_1B = 8$ см (рис. 78, *б, в*).

191. В параллелограмме $ABCD$ длины смежных сторон AB и AD равны соответственно 8 см и 10 см. Вычислите площадь параллелограмма, если $\angle BAD = 30°$.

192. Длины сторон параллелограмма равны 5 см и 6 см, а градусная мера одного из его углов равна 150°. Вычислите площадь параллелограмма.

193. Вычислите площадь параллелограмма, у которого одна из сторон в два раза больше другой, высота, проведенная к большей стороне равна 3 см, а периметр параллелограмма равен 24 см.

194. Вычислите площадь параллелограмма, если длина одной из его сторон равна 8 см, а длина перпендикулярной ей диагонали равна 6 см.

195. Точка F лежит на большем основании AD трапеции $ABCD$ так, что отрезок CF параллелен боковой стороне AB. Вычислите площадь параллелограмма $ABCF$, если высота трапеции равна 3 см, а длины ее средней линии и большего основания равны 5 см и 8 см соответственно.

196. Длина боковой стороны AB прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине D равна 8 см, $\angle BAD = 30°$. Точка O лежит на основании AD так, что отрезок CO параллелен стороне AB. Вычислите площадь четырехугольника $ABCO$, если $BC = 7$ см.

197. Вычислите площадь треугольника ABC, если длина стороны AC равна 12 см, а высота, проведенная к этой стороне, меньше ее в два раза.

198. Площадь треугольника ABC равна 16 см^2, а длина стороны AB равна 8 см. Вычислите высоту этого треугольника, которая проведена к стороне AB.

199. Вычислите высоту треугольника, если она в три раза меньше стороны, к которой проведена, а площадь треугольника равна 24 см^2.

200. В треугольнике ABC длины сторон AC и AB равны соответственно 12 см и 6 см. Вычислите высоту, проведенную к стороне AB, если высота, проведенная к стороне AC, равна 4 см.

201. В треугольнике ABC проведены высоты CD и AE. Вычислите длину стороны BC, если известно, что $AE = 4$ см, $AB = 5$ см и $CD = 12$ см.

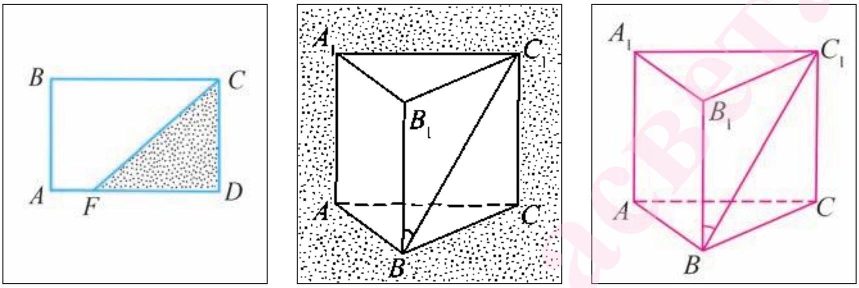
202. Вычислите площадь прямоугольного треугольника, если длина меньшего из его катетов равна 4 см, а длины катетов относятся как $3 : 1$.

203. В треугольнике ABC высота, проведенная к стороне AC, равна 5 см. Вычислите расстояние от вершины C до прямой AB, если $AC = 12$ см, $AB = 6$ см.

204. Вычислите длины катетов прямоугольного треугольника, если они относятся как $4 : 3$, а его площадь равна 24 см^2.

205. Точка F делит сторону AD прямоугольника $ABCD$ в отношении $1 : 3$ (рис. 79, a). Вычислите площадь треугольника FDC, если периметр прямоугольника $ABCD$ равен 20 см, а длина стороны AB равна 2 см.

206. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине B и площадью 6 см^2 (рис. 79, *б, в*). Вычислите длину ребра A_1B_1, если $BC_1 = 8$ см, $\angle C_1BB_1 = 30°$.



а) *б)* *в)*

Рис. 79

207. $ABCD$ — параллелограмм, длина диагонали BD которого равна 10 см. Вычислите площадь параллелограмма, если расстояние от вершины C до прямой AD равно 4 см, а вершина D лежит на серединном перпендикуляре к стороне AB.

208. Длина стороны AB параллелограмма $ABCD$ равна 6 см, а его периметр равен 32 см. Вычислите высоту, проведенную к стороне AB, если высота, проведенная к стороне BC, равна 3 см.

209. Периметр параллелограмма равен 16 см. Вычислите площадь параллелограмма, если градусная мера одного из его углов равна 150°, а длина одной из сторон равна 3 см.

210. Сторона параллелограмма в четыре раза больше проведенной к ней высоты. Вычислите длины сторон параллелограмма, если его площадь равна 16 см^2, а периметр равен 24 см.

211. Градусная мера угла при основании равнобедренного треугольника равна 15°. Найдите площадь треугольника, если длина его боковой стороны равна m.

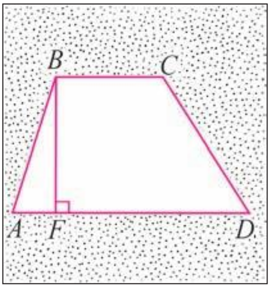
212. Длины сторон треугольника равны 3 см и 8 см. Вычислите площадь треугольника, если градусная мера угла между данными сторонами равна 150°.

213. Площадь равнобедренного треугольника равна 16 см^2. Вычислите длину боковой стороны треугольника, если градусная мера угла при его основании равна 75°.

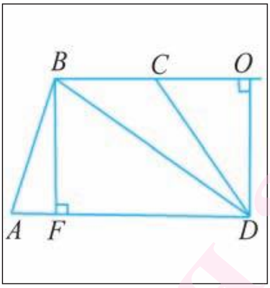
§ 3. Площадь трапеции

В этом параграфе рассмотрим вопрос о вычислении площади трапеции.

Теорема (*о площади трапеции*). ***Площадь трапеции равна произведению полусуммы длин ее оснований на высоту*** $\left(S = \frac{a+b}{2} \cdot h\right.$***, где*** a, b ***— длины оснований,*** h ***— высота*** $\left.\right)$***.***



а)



б)

Рис. 80

Дано: $ABCD$ — трапеция, $BF \perp AD$, $F \in AD$, $AD = a$, $BC = b$, $BF = h$ (рис. 80, *а*).

Доказать: $S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h$.

Доказательство.

1) Проведем диагональ BD и высоту DO трапеции $ABCD$ (рис. 80, *б*). Тогда площадь трапеции $ABCD$ равна сумме площадей треугольников ABD и BCD, т. е. $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD}$.

2) Отрезок BF есть высота треугольника ABD, проведенная к стороне AD, следовательно, $S_{ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot BF = \frac{1}{2}ah$.

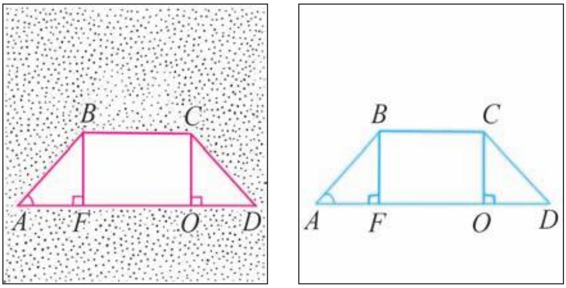
3) Отрезок DO — высота треугольника BCD, проведенная к стороне BC, значит, $S_{BCD} = \frac{1}{2}BC \cdot DO$. Так как $OD = BF$, то

$$S_{BCD} = \frac{1}{2}BC \cdot BF = \frac{1}{2}bh.$$

4) Таким образом, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{a+b}{2} \cdot h$.

Теорема доказана.

Задача 1. В равнобедренной трапеции длины оснований равны 10 см и 16 см, а градусная мера острого угла равна 45°. Вычислите площадь трапеции.



а) *б)*

Рис. 81

Дано: $ABCD$ — трапеция,
$AB = CD$,
$BC = 10$ см,
$AD = 16$ см,
$\angle BAD = 45°$.

Вычислить: S_{ABCD}.

Решение.

Так как по условию задачи даны длины оснований трапеции, то для вычисления площади трапеции необходимо найти ее высоту.

1) Пусть отрезок BF — высота трапеции $ABCD$ (рис. 81, *а, б*). Тогда $S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BF$.

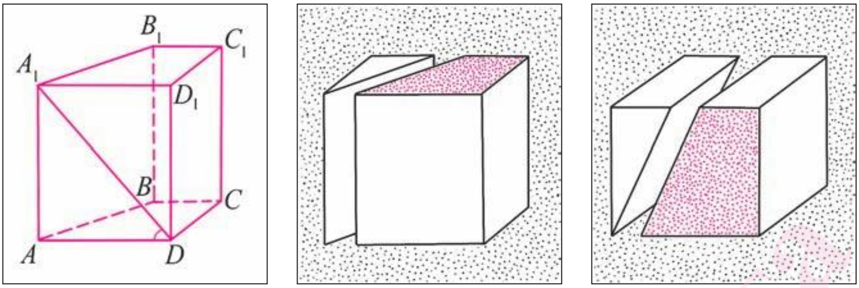
2) Треугольник AFB — прямоугольный с углом 45°, следовательно, $BF = AF$. Теперь найдем длину отрезка AF.

3) Проведем высоту CO трапеции. Треугольники AFB и DOC равны по гипотенузе и катету ($AB = CD$, $BF = CO$). Отсюда следует, что $AF = OD$. Так как $FO = BC$, то $AF = \frac{1}{2}(AD - FO) = \frac{1}{2}(AD - BC) = \frac{1}{2}(16 - 10) = 3$ (см), т. е. $BF = 3$ см.

4) Таким образом, $S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BF = \frac{1}{2}(16 + 10) \cdot 3 = 39$ (см^2).

Ответ: 39 см^2.

Задача 2. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит прямоугольная трапеция $ABCD$ с прямым углом при вершине D (рис. 82, *а*). Представление о призме, основаниями которой служат прямоугольные трапеции, дает модель, которая получится, если от модели прямоугольного параллелепипеда отрезать часть, имеющую форму прямой треугольной призмы, как показано на рисунке 82, *б, в*. Вычислите площадь основания призмы, если известно, что $AD : BC = 2 : 1$, $\angle ADA_1 = 60°$, $A_1D = 4$ см, $DC = 2$ см.



а) б) в)

Рис. 82

Решение.

Основание призмы — трапеция. Для нахождения площади трапеции необходимо знать длины ее оснований и высоту. В данном случае основания AD, BC трапеции и ее высота DC являются ребрами призмы. Так как длина отрезка DC известна, то для решения задачи необходимо вычислить длины отрезков AD и BC.

1) Данная призма является прямой, значит, все ее боковые грани являются прямоугольниками. В прямоугольном треугольнике A_1AD катет AD лежит против угла 30°, поэтому $AD = \frac{1}{2}A_1D = 2$ см. Так как $AD : BC = 2 : 1$, то $BC = 1$ см.

2) Таким образом, $S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot DC = \frac{2+1}{2} \cdot 2 = 3$ (см^2).

Ответ: 3 см^2.

Задачи к § 3

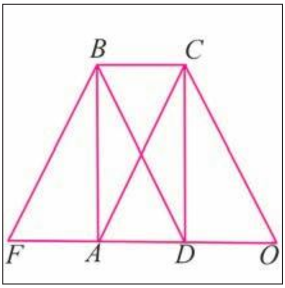
214. Вычислите площадь трапеции $ABCD$, если длина ее средней линии равна 10 см, $AB = 6$ см, градусная мера угла ABC при основании BC равна 150°.

215. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD градусная мера угла BAD равна 30°. Вычислите площадь трапеции, если $AB = BC = 8$ см и $AD : BC = 3 : 1$.

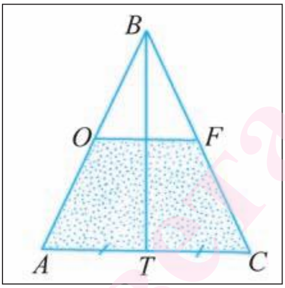
216. Вычислите площадь равнобедренной трапеции, периметр которой равен 32 см, длина боковой стороны — 5 см, а ее высота — 4 см.

217. Периметр прямоугольника $ABCD$ равен 18 см, а длины его сторон относятся как $2 : 1$ (рис. 83, *а*). Точки O и F

лежат на прямой AD так, что отрезки BF и CO параллельны диагоналям AC и BD прямоугольника соответственно. Вычислите площадь четырехугольника $FBCO$.



а)



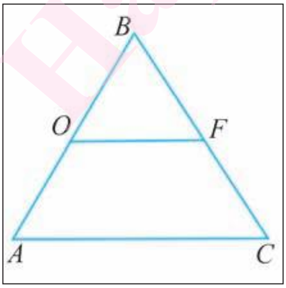
б

Рис. 83

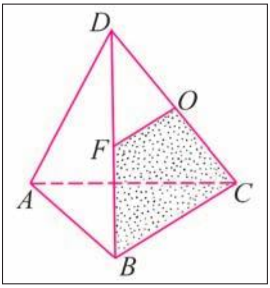
218. Точки O и F — соответственно середины боковых сторон AB и BC равнобедренного треугольника ABC, отрезок BT — медиана треугольника (рис. 83, *б*). Вычислите длину медианы BT этого треугольника, если $AC = 12$ см, а площадь четырехугольника $AOFC$ равна 72 см^2.

219. Точки O и F — середины сторон AB и CB равностороннего треугольника ABC соответственно (рис. 84, *а*). Вычислите площадь четырехугольника $OACF$, если площадь треугольника ABC равна 48 см^2.

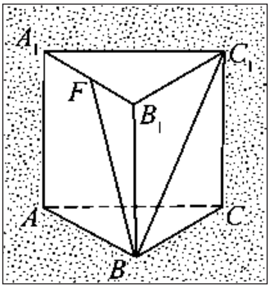
220. Точки O и F — середины ребер CD и BD тетраэдра $DABC$ (рис. 84, *б*). Вычислите площадь четырехугольника $COFB$, если площадь поверхности данного тетраэдра равна 64 см^2.



а)



б)



в)

Рис. 84

221. $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма, основаниями которой служат равносторонние треугольники, точка F — середина ребра A_1B_1 (рис. 84, *в*). Вычислите площадь трапеции AA_1FB, если периметр основания призмы равен 12 см, а площадь боковой грани равна 40 см^2.

222. Площадь квадрата $ABCD$ равна 36 см^2, точка F лежит на прямой AD так, что отрезок CF параллелен диагонали BD квадрата. Вычислите площадь четырехугольника $ABCF$.

223. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 44 см, длина стороны AB равна 10 см, а $\angle ABC = 150°$. Вычислите площадь четырехугольника $ABCF$, вершина F которого лежит на прямой AD так, что отрезок CF параллелен диагонали BD параллелограмма.

224. Градусная мера острого угла прямоугольной трапеции равна 45°, а высота, проведенная из вершины тупого угла, делит трапецию на треугольник и квадрат, площадь которого равна 36 см^2. Вычислите площадь трапеции.

225. Вычислите площадь прямоугольной трапеции, у которой градусная мера тупого угла равна 135°, а длины меньшего основания и меньшей боковой стороны равны по 4 см.

226. Периметр прямоугольной трапеции равен 15 см, а ее площадь — 9 см^2. Вычислите длину большей боковой стороны трапеции, если длина ее меньшей боковой стороны равна 3 см.

227. Длина большего основания трапеции на 4 см превышает длину ее меньшего основания. Вычислите длины оснований трапеции, если ее высота равна 4 см, а площадь 16 см^2.

228. Площадь трапеции равна 36 см^2, а длины ее оснований относятся как $2 : 1$. Вычислите высоту трапеции, если длина меньшего основания равна 4 см.

229. Длины оснований трапеции относятся как $3 : 1$, а ее высота равна 3 см. Вычислите длины оснований трапеции, если ее площадь равна 24 см^2.

230. В трапеции $ABCD$ длина основания BC равна 4 см, а ее высота равна 8 см. Вычислите площадь трапеции, если площадь треугольника ACD равна 30 см^2.

231. Длины оснований BC и AD трапеции $ABCD$ соответственно относятся как $2:1$. Вычислите площадь трапеции, если известно, что площадь треугольника ABC равна 8 см^2.

232. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников ABO и DCO равны.

233. $ABCD$ — квадрат, площадь которого равна 64 см^2. Точки O и F лежат на прямой BC так, что отрезки DO и AF параллельны соответственно диагоналям AC и BD квадрата. Вычислите площадь четырехугольника $ADOF$.

234. В равнобедренной трапеции угол при меньшем основании равен 135°. Вычислите площадь трапеции, если длина большего основания равна 18 см, а ее высота равна меньшему основанию трапеции.

235. В трапеции $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой угла BAD. Вычислите площадь трапеции, если известно, что длина основания AD равна 12 см, $AB = 8$ см, $\angle ABC = 150°$.

236. Длина меньшего основания прямоугольной трапеции равна 8 см. Меньшая диагональ трапеции составляет с ее меньшим основанием угол, градусная мера которого равна 45°. Вычислите площадь трапеции, если ее тупой угол равен 135°.

237. Длина боковой стороны равнобедренной трапеции равна 16 см, а градусная мера одного из ее углов равна 150°. Вычислите периметр трапеции, если ее площадь равна 88 см^2.

238. Высота равнобедренной трапеции, проведенная из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки, длина одного из которых составляет одну третью длины меньшего основания. Вычислите площадь трапеции, если разность длин ее оснований равна 4 см, а высота трапеции — 8 см.

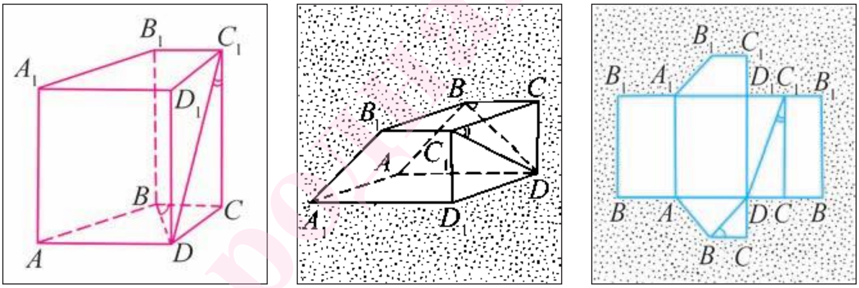
239. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD угол ADC равен $60°$, а биссектрисы углов BCD и ADC пересекаются в точке O. Найдите площадь трапеции, если $OD = m$, $BC = a$, $AD = b$.

240. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) диагональ BD перпендикулярна основаниям, $\angle CAD = \angle CAB$, $AD = \sqrt{3}$ см, $AB = 2\sqrt{3}$ см, а площадь трапеции равна $\frac{9}{2}\sqrt{3}$ см. Вычислите расстояние между прямыми AD и BC.

241. Найдите площадь равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, а ее высота равна h.

242. Основания равнобедренной трапеции равны a и b. Найдите площадь трапеции, если ее диагонали взаимно перпендикулярны.

243. Середина боковой стороны трапеции соединена с концами другой боковой стороны. Найдите площадь трапеции, если площадь полученного треугольника равна S.



а) *б)* *в)*

Рис. 85

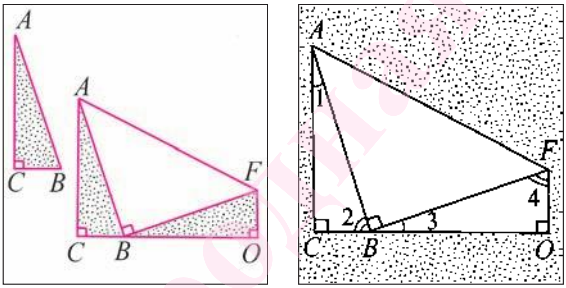
244. На рисунке 85, *а, б* изображена прямая призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, основанием которой служит прямоугольная трапеция $ABCD$ с прямым углом при вершине D. Развертка такой призмы изображена на рисунке 85, *в*. Вычислите площадь основания призмы, если $\angle ABC = 135°$, $\angle DBC = 45°$, $DC_1 = 8$ см, $\angle DC_1C = 30°$.

§ 4. Теорема Пифагора. Теорема, обратная теореме Пифагора

1. Теорема Пифагора. В практической деятельности часто возникает необходимость вычисления длин сторон прямоугольного треугольника. Например, в процессе проведения строительных работ или при изготовлении мебели требуется знание размеров конструкций или деталей, имеющих форму прямоугольного треугольника.

Докажем теорему, которая характеризует зависимость длин сторон прямоугольного треугольника. По мнению историков, доказательство этой теоремы было дано древнегреческим ученым Пифагором, который жил примерно в VI веке до н. э.

Теорема 1 (*теорема Пифагора*). ***В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин его катетов.***



а) б)

Рис. 86

Дано: $\triangle ACB$, $\angle ACB = 90^\circ$ (рис. 86, *а*).

Доказать: $AB^2 = BC^2 + AC^2$.

Доказательство.

Пусть $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$.

I. *Рассмотрим случай, когда* $b > a$.

1) Построим прямоугольный треугольник BOF с прямым углом при вершине O так, чтобы точка O лежала на луче CB, $BO = b$, $FO = a$, а точки A и F были расположены по одну сторону от прямой CB (рис. 86, *а*, *б*). Треугольник BOF равен треугольнику ACB по двум катетам.

2) Четырехугольник $ACOF$ — прямоугольная трапеция. Действительно, так как $AC \perp CO$ и $FO \perp CO$, то $AC \parallel FO$. Так как $AC > FO$, то стороны AF и CO не параллельны.

3) Треугольник ABF является прямоугольным, так как $\angle ABF = 90°$. В самом деле, $\angle ABF = 180° - (\angle 2 + \angle 3)$. В прямоугольном треугольнике ACB выполняется равенство $\angle 1 + \angle 2 = 90°$. Так как $\angle 1 = \angle 3$, то $\angle 2 + \angle 3 = 90°$. Следовательно, $\angle ABF = 180° - 90° = 90°$.

4) Трапеция $ACOF$ представляет собой объединение треугольников ACB, BOF и ABF, которые не имеют общих внутренних точек. Следовательно, $S_{ACOF} = S_{ACB} + S_{BOF} + S_{ABF}$, или $\frac{1}{2}(a+b)(a+b) = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$. Отсюда получим, что $(a+b)^2 = ab + ab + c^2$, $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$, т. е. $c^2 = a^2 + b^2$.

II. *Рассмотрим случай, когда* $b = a$.

1) Построим прямоугольный треугольник BOF с прямым углом при вершине O так, чтобы точка O лежала на луче CB, $BO = a$, $FO = a$, а точки A и F были расположены по одну сторону от прямой CB (рис. 87).

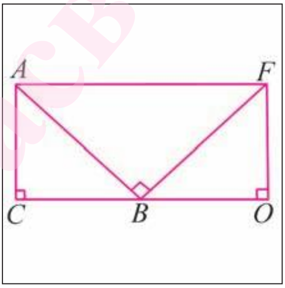


Рис. 87

2) Четырехугольник $ACOF$ — прямоугольник, так как он является параллелограммом ($AC = FO$, $AC \parallel FO$), у которого все углы прямые.

3) Прямоугольник $ACOF$ есть объединение прямоугольных треугольников ACB, BOF и ABF, которые не имеют общих внутренних точек. Значит, $S_{ACOF} = S_{ACB} + S_{BOF} + S_{ABF}$, или $a \cdot 2a = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}c^2$. Отсюда получим, $c^2 = 2a^2$, т. е. $c^2 = a^2 + a^2$.

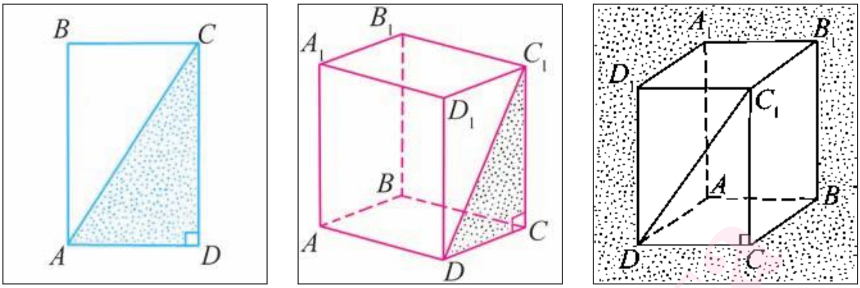
Теорема доказана.

Рассмотрим примеры решения задач на применение теоремы Пифагора.

Пусть $ABCD$ — прямоугольник, длины сторон которого 3 см и 4 см (рис. 88, *а*). Тогда по теореме Пифагора можем вычислить длину диагонали прямоугольника.

В прямоугольном треугольнике ACD по теореме Пифагора $AC^2 = AD^2 + DC^2$. Отсюда получим, что $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$ (см).

Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, у которого длина ребра DC равна 6 см, а длина



а) б) в)

Рис. 88

диагонали DC_1 грани DD_1C_1C равна 10 см (рис. 88, *б*, *в*). Воспользовавшись теоремой Пифагора, можем вычислить длину ребра CC_1. Все грани прямоугольного параллелепипеда являются прямоугольниками, следовательно, грань DD_1C_1C — прямоугольник. В прямоугольном треугольнике DCC_1 по теореме Пифагора $DC_1^2 = DC^2 + CC_1^2$. Отсюда получим $CC_1 = \sqrt{DC_1^2 - DC^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$ (см).

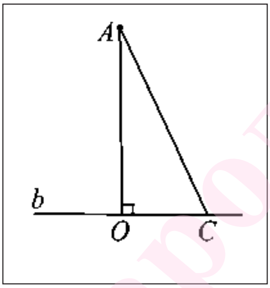


Рис. 89

На основании теоремы Пифагора можно доказать свойства наклонных и их проекций.

Напомним, что если AO — перпендикуляр, проведенный из точки $A \notin b$ к прямой b, а точка C лежит на прямой b и не совпадает с точкой O, то отрезок AC называется *наклонной*, проведенной из точки A к прямой b. При этом отрезок OC называется *проекцией* наклонной AC на прямую b (рис. 89).

Свойство 1. ***Если из одной точки, не лежащей на прямой, проведены к ней наклонные, то наклонные равны, если равны их проекции.***

Свойство 2. ***Если из одной точки, не лежащей на прямой, проведены к ней наклонные, то та наклонная больше, которая имеет большую проекцию.***

Докажите свойства **1** и **2** самостоятельно.

2. Теорема, обратная теореме Пифагора. Данная теорема позволяет, зная длины сторон треугольника, выяснить, является ли треугольник прямоугольным.

Теорема 2 (*теорема, обратная теореме Пифагора*). ***Если квадрат длины одной стороны треугольника равен сумме квадратов длин двух других сторон, то такой треугольник является прямоугольным.***

Доказательство.

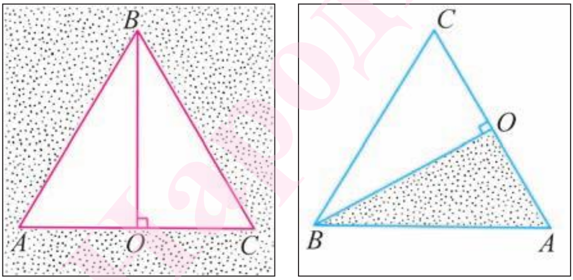
1) Пусть в треугольнике ABC выполняется равенство $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Докажем, что $\angle ACB = 90°$. Рассмотрим прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ с прямым углом при вершине C_1, у которого $A_1C_1 = AC$ и $B_1C_1 = BC$.

2) Тогда по теореме Пифагора $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$. Следовательно, $A_1B_1^2 = AC^2 + BC^2$. Так как по условию теоремы $AB^2 = AC^2 + BC^2$, то $AB^2 = A_1B_1^2$. Отсюда следует, что $AB = A_1B_1$.

3) Таким образом, имеем $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$ и $AB = A_1B_1$, т. е. треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам. Следовательно, $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$, т. е. треугольник ACB — прямоугольный с прямым углом при вершине C.

Теорема доказана.

Задача 1. Сторона равностороннего треугольника ABC равна a. Докажите, что высота такого треугольника равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.



а) б)

Рис. 90

Дано: $\triangle ABC$ — равносторонний, $AB = a$ (рис. 90, *а*, *б*).

Доказать: высота треугольника ABC равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

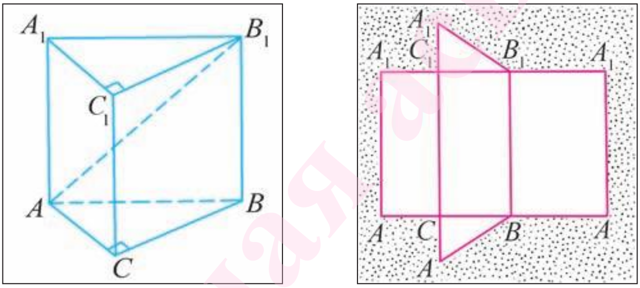
Доказательство.

1) Пусть BO — высота треугольника ABC, тогда треугольник BOC — прямоугольный.

2) Отрезок BO — высота равностороннего треугольника ABC, поэтому BO является также его медианой, а значит, $OC = \frac{a}{2}$.

3) В прямоугольном треугольнике BOC по теореме Пифагора $BC^2 = BO^2 + OC^2$. Отсюда найдем $BO = \sqrt{BC^2 - OC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Что и требовалось доказать.

Задача 2. $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма, основанием которой служит прямоугольный треугольник ACB с прямым углом при вершине C (рис. 91, *а*). Развертка такой призмы изображена на рисунке 91, *б*. Вычислите длину диагонали боковой грани AA_1B_1B призмы, если площадь основания призмы равна 6 см^2, $AC = 3$ см, а площадь грани CC_1B_1B равна 40 см^2.



а) *б)*

Рис. 91

Решение.

Диагональ боковой грани прямой призмы служит гипотенузой прямоугольного треугольника, один из катетов которого является стороной основания призмы, а другой — ее боковым ребром. Таким образом, для вычисления длины диагонали боковой грани можем воспользоваться теоремой Пифагора.

1) Каждая боковая грань прямой призмы является прямоугольником. Следовательно, в прямоугольном треугольнике ABB_1 длина гипотенузы $AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2}$. Теперь найдем длины отрезков AB и BB_1.

2) Треугольник ACB — прямоугольный, следовательно, $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC$. Так как $S_{ABC} = 6$ см^2, $AC = 3$ см, то $BC = 4$ см. Теперь найдем длину гипотенузы $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$ (см).

3) Грань CC_1B_1B — прямоугольник, следовательно, ее площадь $S_{CC_1B_1B} = BB_1 \cdot BC$. Из уравнения $40 = 4BB_1$ найдем $BB_1 = 10$ см.

4) Таким образом, $AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{100 + 25} = 5\sqrt{5}$ (см).

Ответ: $5\sqrt{5}$ см.

Вопросы к § 4

1. Сформулируйте теорему Пифагора. Для каких треугольников она применяется?

2. Докажите теорему Пифагора.

3. Какие данные достаточно иметь в прямоугольном треугольнике, чтобы найти по теореме Пифагора: а) длину гипотенузы; б) длину катета?

4. Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме Пифагора.

5. Верно ли, что существует прямоугольный треугольник, для которого площади квадратов, сторонами которых служат стороны прямоугольного треугольника, равны 9 см^2, 16 см^2 и 35 см^2?

6. Верно ли, что треугольник, длины сторон которого равны 9 см, 12 см и 15 см, является прямоугольным?

7. Дан прямоугольный треугольник. Верно ли утверждение, что площадь равностороннего треугольника, стороной которого служит гипотенуза, равна сумме площадей равносторонних треугольников, сторонами которых служат его катеты?

Задачи к § 4

245. Длина одного из катетов прямоугольного треугольника равна 3 см, а длина другого — на 1 см больше. Вычислите длину гипотенузы треугольника.

246. Вычислите длину катета прямоугольного треугольника, если длина его гипотенузы равна 13 см, а длина другого катета на 1 см меньше длины гипотенузы.

247. В прямоугольном треугольнике длина гипотенузы равна 4 см, а градусная мера острого угла равна 60°. Вычислите длину катета, лежащего против угла в 60°.

248. Длина гипотенузы прямоугольного треугольника равна c, а градусная мера острого угла равна $60°$. Докажите, что длина катета, лежащего против угла в $60°$, равна $\frac{c\sqrt{3}}{2}$.

249. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 6 см и 8 см. Вычислите высоту, проведенную к гипотенузе треугольника.

250. Периметр прямоугольника равен 28 см, а длина одной из сторон равна 6 см. Вычислите длину диагонали прямоугольника.

251. Вычислите площадь прямоугольника, длина диагонали которого равна 10 см, а длина одной из сторон — 8 см.

252. В равнобедренном треугольнике длина основания равна 24 см, а длина боковой стороны — 15 см. Вычислите площадь треугольника.

253. Площадь равнобедренного треугольника ABC равна 48 см^2, а длина его основания AC равна 12 см. Вычислите длину боковой стороны треугольника.

254. Вычислите площадь равнобедренного треугольника, если длина его основания равна 18 см, а противолежащий угол — $120°$.

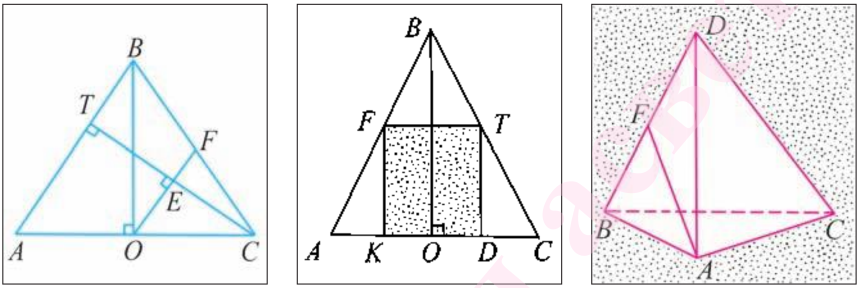
255. Вычислите длину стороны равностороннего треугольника, если его высота равна 8 см.

256. Сторона равностороннего треугольника равна a. Докажите, что его площадь S вычисляется по формуле $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

257. Точка F — середина боковой стороны BC, а точка O — середина основания AC равнобедренного треугольника ABC (рис. 92, *а*). Вычислите высоту трапеции $ABFO$, если $AC = 12$ см, $BC = 10$ см.

258. Отрезок BO — высота равнобедренного треугольника ABC с основанием AC; FK и TD — средние линии треугольников AOB и COB соответственно (рис. 92, *б*). Вычислите площадь четырехугольника $FTDK$, если $AB = 17$ см, $AC = 16$ см.

259. Точка F — середина ребра DB тетраэдра $DABC$ (рис. 92, *в*). Вычислите площадь поверхности тетраэдра, если $AF = \sqrt{3}$ см.



а) *б)* *в)*

Рис. 92

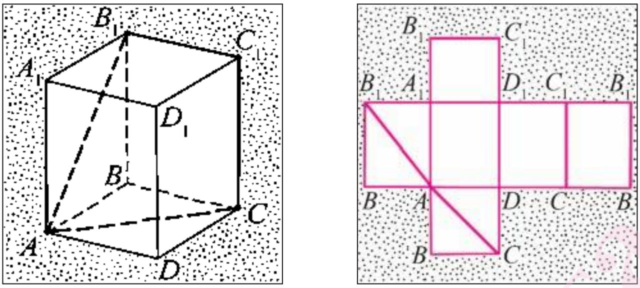
260. Длина боковой стороны равнобедренного треугольника равна 17 см, а длина медианы, проведенной к основанию, равна 15 см. Вычислите периметр треугольника.

261. Вычислите периметр ромба, если длины его диагоналей равны 12 см и 16 см.

262. Длина одной из диагоналей ромба равна 12 см, а длина его стороны — 10 см. Вычислите площадь ромба.

263. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая призма, основаниями которой служат квадраты (рис. 93, *а*). Развертка такой призмы изображена на рисунке 93, *б*. Вычислите длину замкнутой пространственной ломаной AB_1C_1CA, если площади основания и боковой грани призмы равны соответственно 9 см^2 и 12 см^2.

264. В прямоугольной трапеции длины оснований равны 6 см и 9 см, а длина большей боковой стороны равна 5 см. Вычислите площадь трапеции.



а) б)

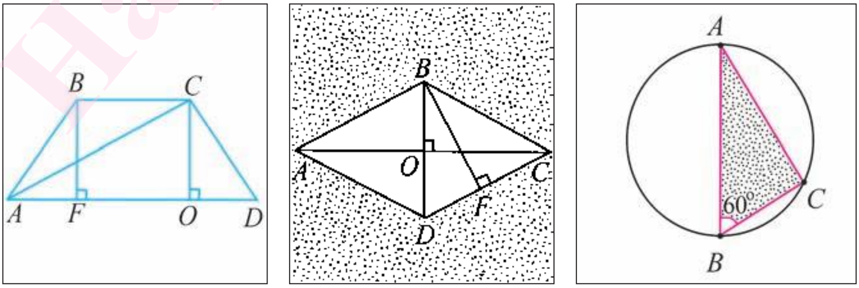
Рис. 93

265. Вычислите длину большей боковой стороны прямоугольной трапеции, если ее площадь равна 120 см^2, а длина большего основания и высота равны 18 см и 8 см соответственно.

266. Длины оснований равнобедренной трапеции равны 12 см и 28 см, а длина боковой стороны равна 10 см. Вычислите площадь трапеции.

267. Вычислите длину боковой стороны равнобедренной трапеции, если длины ее оснований равны 9 см и 21 см, а площадь 120 см^2.

268. Диагональ AC равнобедренной трапеции $ABCD$ является биссектрисой угла BAD. Вычислите длину средней линии трапеции, если длина ее боковой стороны AB равна 10 см, а высота $BF = 8$ см (рис. 94, *а*).



а) б) в)

Рис. 94

269. Периметр ромба $ABCD$ равен 40 см, а длина его диагонали AC равна 16 см. Вычислите высоту BF ромба (рис. 94, *б*).

270. Вычислите длину диагонали параллелограмма, являющейся его высотой, если периметр параллелограмма равен 50 см, а разность длин его сторон равна 1 см.

271. Отрезок AB — диаметр окружности радиусом R, точка C лежит на этой окружности так, что $\angle ABC = 60°$. Докажите, что площадь треугольника ABC равна $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$ (рис. 94, *в*).

272. Вычислите площадь треугольника, длины сторон которого равны 13 см, 5 см и 12 см.

273. Длина гипотенузы прямоугольного треугольника относится к длине его катета как $5:3$. Вычислите площадь данного треугольника, если длина другого катета равна 8 см.

274. Вычислите площадь равнобедренного треугольника, у которого высота, проведенная к боковой стороне, делит ее на отрезки длиной 3 см и 12 см.

275. Градусная мера острого угла прямоугольной трапеции равна 45°. Вычислите площадь этой трапеции, если длина ее большей боковой стороны равна $4\sqrt{2}$ см, а длина меньшей диагонали равна 5 см.

276. Докажите, что треугольник является прямоугольным, если длины его сторон пропорциональны числам 7, 24 и 25.

277. Длина боковой стороны равнобедренной трапеции равна $\sqrt{26}$ см, а высота трапеции, проведенная из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки, меньший из которых равен 1 см. Вычислите площадь этой трапеции, если ее диагонали взаимно перпендикулярны.

278. В равнобедренной трапеции длина диагонали равна 25 см, а высота равна 15 см. Вычислите площадь трапеции.

279. Длина средней линии равнобедренной трапеции равна 20 см, а ее высота — 15 см. Вычислите длины диагонали и боковой стороны трапеции, если длины ее оснований относятся как 3 : 7.

3

ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Глава 3
ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

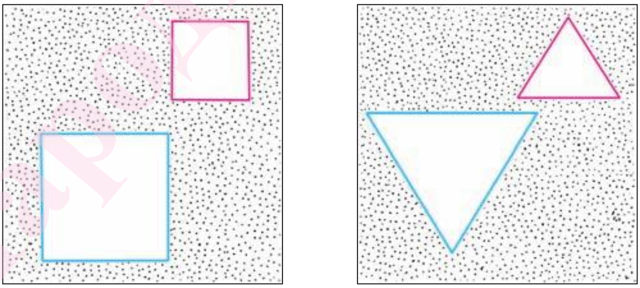
§ 1. Пропорциональные отрезки. Подобные треугольники

1. Пропорциональные отрезки. Определим понятие пропорциональных отрезков.

Определение. **Отношением отрезков AB и CD называется отношение длин этих отрезков, т. е. $\frac{AB}{CD}$.**

Говорят, что отрезки AB, CD, FE пропорциональны соответственно отрезкам A_1B_1, C_1D_1, F_1E_1, если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{EF}{E_1F_1}$.

Ранее мы изучили понятие равных треугольников. В повседневной жизни встречаются предметы, которые имеют одинаковую форму, но различные размеры. Например, любые два листа жести, имеющие форму квадрата (рис. 95, *а*) или форму равностороннего треугольника (рис. 95, *б*), обладают указанными свойствами.



а) *б)*

Рис. 95

2. Подобные треугольники. Рассмотрим понятие подобных треугольников.

Пусть между вершинами двух треугольников установлено взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие вершины обозначаются буквами A и A_1, B и B_1, C и C_1.

Тогда для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответствующими являются $\angle A$ и $\angle A_1$, $\angle B$ и $\angle B_1$, $\angle C$ и $\angle C_1$ и стороны AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1(рис. 96, *а*).

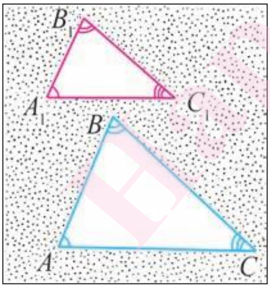
Определение. **Два треугольника называются подобными, если между их вершинами можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что соответствующие углы равны, а соответствующие стороны пропорциональны.**

Иначе говоря, два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ называются подобными, если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$ (рис. 96, *а*).

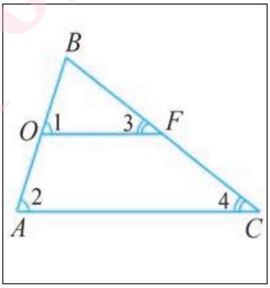
Число k, равное отношению соответствующих сторон, называется ***коэффициентом подобия.***

Подчеркнем, что при обозначении подобных треугольников соответствующие друг другу вершины ставятся на одинаковые места. Если треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$, то пишут: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

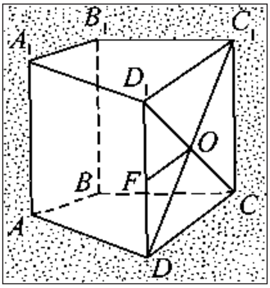
Например, пусть отрезок OF — средняя линия треугольника ABC (рис. 96, *б*). Тогда треугольник ABC подобен треугольнику OBF, так как $\angle 1 = \angle 2$ (как соответственные при пересечении параллельных прямых AC и OF секущей AB), $\angle 3$ равен $\angle 4$ (как соответственные при пересечении параллельных прямых AC и OF секущей CB, $\angle B$ — общий и $\frac{AB}{OB} = \frac{BC}{BF} = \frac{AC}{OF} = 2$).



а)



б)



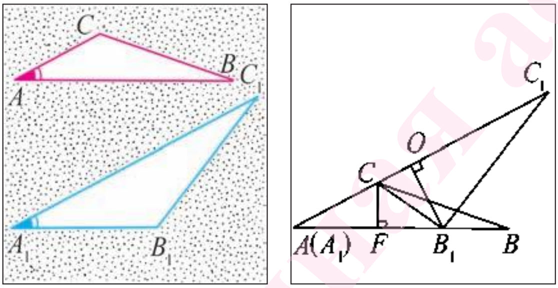
в)

Рис. 96

Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая четырехугольная призма, точка F — середина ребра DD_1, а точка O — точка пересечения диагоналей грани DD_1C_1C (рис. 96, *в*). Тогда треугольник DD_1C_1 подобен треугольнику DFO. Действительно, точка O — середина отрезка DC_1, так как диагонали прямоугольника DD_1C_1C точкой пересечения делятся пополам. Таким образом, отрезок OF — средняя линия треугольника DD_1C_1, следовательно, треугольник DD_1C_1 подобен треугольнику DFO.

Теперь докажем теорему, которой воспользуемся в дальнейшем для доказательства свойства площадей подобных треугольников.

Теорема 1. ***Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения длин сторон, заключающих равные углы.***



а) б)

Рис. 97

Дано:
$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$,
$\angle CAB = \angle C_1A_1B_1$
(рис. 97, *а*),

Доказать:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}.$$

Доказательство.

1) Наложим треугольник $A_1B_1C_1$ на треугольник ABC так, чтобы вершина A_1 совместилась с вершиной A, а стороны A_1B_1 и A_1C_1 лежали на лучах AB и AC соответственно (рис. 97, *б*).

2) Пусть CF — высота треугольника ACB (см. рис. 97, *б*), тогда отрезок CF является также высотой треугольника ACB_1. Так как треугольники имеют общую высоту, то их площади относятся как длины оснований, т. е.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACB_1}} = \frac{AB}{AB_1}. \qquad (1)$$

3) Пусть отрезок B_1O — высота треугольника ACB_1, тогда отрезок B_1O также высота треугольника AB_1C_1.

Следовательно, площади этих треугольников относятся как длины оснований, т. е.

$$\frac{S_{ACB_1}}{S_{AB_1C_1}} = \frac{AC}{AC_1}. \qquad (2)$$

4) Умножив равенства (1) и (2), получим:

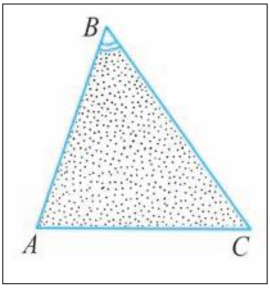
$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{AB_1 \cdot AC_1}.$$

Так как $AB_1 = A_1B_1$, $AC_1 = A_1C_1$ и $S_{AB_1C_1} = S_{A_1B_1C_1}$, то

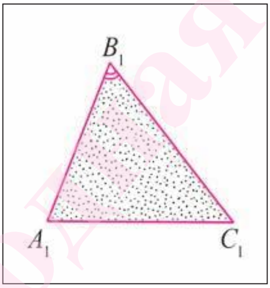
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2 (*об отношении площадей подобных треугольников*). ***Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.***



а)



б)

Рис. 98

Дано: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, k — коэффициент подобия (рис. 98, *а*, *б*).

Доказать: $S_{ABC} : S_{A_1B_1C_1} = k^2$.

Доказательство.

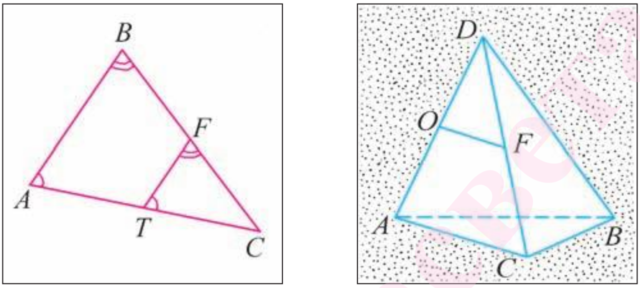
1) Так как треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ и коэффициент подобия равен k, то

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1 \text{ и } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k.$$

2) Так как, например, $\angle B = \angle B_1$, то (по теореме 1) выполняется равенство $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot BC}{A_1B_1 \cdot B_1C_1}$. По условию теоремы $\frac{AB}{A_1B_1} = k$ и $\frac{BC}{B_1C_1} = k$, следовательно, $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2$.

Теорема доказана.

Рассмотрим пример. Пусть отрезок FT — средняя линия треугольника ABC (рис. 99, *а*). Треугольник ABC подобен треугольнику TFC с коэффициентом подобия $k = 2$. Следовательно, по теореме об отношении площадей подобных треугольников имеем, что $\frac{S_{ABC}}{S_{TFC}} = 4$, т. е. $S_{ABC} = 4S_{TFC}$.



а) *б)*

Рис. 99

Задача 1. Сумма площадей всех боковых граней правильной треугольной пирамиды $DABC$ равна S. Точки O и F — середины ребер DA и DC соответственно. Найдите площадь треугольника DOF.

Решение.

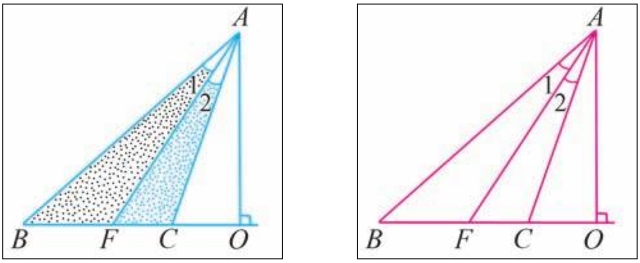
1) Так как отрезок OF — средняя линия треугольника DAC, то треугольник DOF подобен треугольнику DAC с коэффициентом подобия $k = \frac{1}{2}$ (рис. 99, *б*).

2) Треугольник DOF подобен треугольнику DAC, следовательно, по теореме об отношении площадей подобных треугольников $\frac{S_{DOF}}{S_{DAC}} = \frac{1}{4}$ или $S_{DOF} = \frac{1}{4}S_{DAC}$.

3) По условию $DABC$ — правильная треугольная пирамида, значит, все ее боковые грани — равные равнобедренные треугольники. Таким образом, $S_{DAC} = \frac{S}{3}$ и $S_{DOF} = \frac{S}{12}$.

Ответ: $\frac{S}{12}$.

Теорема 3 (*о свойстве биссектрисы треугольника*). ***Биссектриса любого угла треугольника делит противолежащую сторону в таком отношении, в каком находятся прилежащие стороны.***



а) Рис. 100 *б)*

Доказательство.

1) Пусть AF — биссектриса треугольника ABC. Докажем, что $\frac{BF}{FC} = \frac{AB}{AC}$ (рис. 100, *а*, *б*).

2) Пусть $AO \perp BC$, $O \in BC$. Тогда отрезок AO — общая высота треугольников ABF и ACF. Следовательно, площади этих треугольников относятся как длины оснований BF и CF, т. е.

$$\frac{S_{ABF}}{S_{ACF}} = \frac{BF}{CF}. \qquad (1)$$

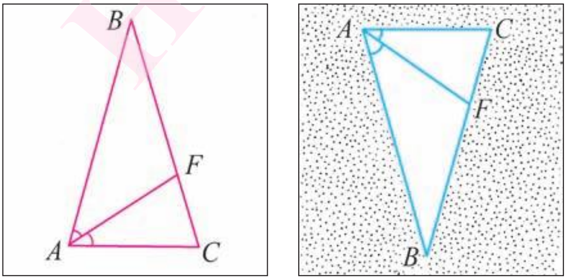
3) Так как AF — биссектриса, то $\angle 1 = \angle 2$. Следовательно, по теореме **1** выполняется равенство

$$\frac{S_{ABF}}{S_{ACF}} = \frac{AB \cdot AF}{AC \cdot AF} = \frac{AB}{AC}. \qquad (2)$$

4) Из равенств (1) и (2) следует, что $\frac{BF}{CF} = \frac{AB}{AC}$.

Теорема доказана.

Задача 2. В равнобедренном треугольнике ABC длины основания AC и боковой стороны BC равны соответственно 2,5 см и 10 см, AF — биссектриса треугольника. Вычислите длины отрезков, на которые точка F делит боковую сторону.



а) Рис. 101 *б)*

Дано:
$\triangle ABC$, $AB = BC$,
AF — биссектриса,
$BC = 10$ см,
$AC = 2{,}5$ см.

Вычислить:
BF, FC.

Решение.

1) Так как отрезок AF — биссектриса, то по теореме **3** можем записать: $\frac{BF}{FC} = \frac{AB}{AC}$. Так как $AB = BC$, то $\frac{BF}{FC} = \frac{BC}{AC}$ (рис. 101, *а*, *б*).

2) Пусть $BF = x$, тогда $FC = 10 - x$. Следовательно, имеем равенство $\frac{x}{10 - x} = 10 : \frac{5}{2}$. Отсюда получим, что $x = 8$.

Таким образом, $BF = 8$ см и $FC = 2$ см.

Ответ: 8 см, 2 см.

Вопросы к § 1

1. Что называется отношением отрезков?

2. Какие треугольники называются подобными?

3. Какое число называется коэффициентом подобия треугольников?

4. Сформулируйте теорему об отношении площадей подобных треугольников.

5. Сформулируйте теорему о свойстве биссектрисы треугольника.

Задачи к § 1

280. Треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$, $BC = 14$ см, $B_1C_1 = 7$ см, $A_1C_1 = 5$ см. Вычислите длину стороны AC.

281. В треугольнике ABC длины сторон AB и AC равны 12 см и 8 см соответственно, длина стороны FT треугольника FTO равна 6 см. Вычислите длину стороны FO, если треугольник ABC подобен треугольнику FTO, $\angle A = \angle F$, $\angle B = \angle T$.

282. Длины двух соответствующих сторон подобных треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны 3 см и 9 см соответственно. Вычислите площадь треугольника $A_2B_2C_2$, если площадь треугольника $A_1B_1C_1$ равна 7 см^2.

283. Длины сторон треугольника равны 4 см, 5 см и 7 см. Вычислите длины сторон подобного ему треугольника, периметр которого равен 112 см.

284. Площади двух подобных треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны 9 см^2 и 16 см^2 соответственно. Длина одной из сторон треугольника $A_1B_1C_1$ равна 3 см. Вычислите длину соответствующей стороны треугольника $A_2B_2C_2$.

285. Докажите, что отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

286. Длины соответствующих сторон подобных треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны 4 см и 12 см соответственно. Вычислите периметр треугольника $A_2B_2C_2$, если периметр треугольника $A_1B_1C_1$ равен 17 см.

287. В треугольнике ABC отрезок AD является биссектрисой. Вычислите длины отрезков BD и DC, если $AB = 14$ см, $BC = 20$ см, $AC = 21$ см.

288. Вычислите длины двух сторон треугольника, если сумма их длин равна 18 см, а биссектриса, проведенная к третьей стороне, делит эту сторону в отношении $2 : 1$.

289. Вычислите длины отрезков, на которые делит гипотенузу прямоугольного треугольника биссектриса, проведенная из вершины прямого угла, если длины катетов треугольника равны 6 см и 8 см.

290. Длины соответствующих сторон подобных треугольников равны 3 см и 2 см, а сумма их площадей равна 26 см^2. Вычислите площади этих треугольников.

291. В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит гипотенузу на отрезки, длины которых 20 см и 15 см. Вычислите площадь треугольника.

292. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла делит катет на отрезки, длины которых 20 см и 12 см. Вычислите периметр треугольника.

293. Диагональ AC трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) делит ее на два подобных треугольника ABC и DCA. Вычислите длину диагонали AC, если $BC = 4$ см, $AD = 9$ см.

294. В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при основании делит боковую сторону на отрезки, длины которых равны 30 см и 25 см. Вычислите периметр треугольника.

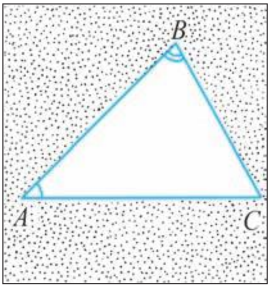
295. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC биссектриса AD отсекает треугольник CAD, подобный треугольнику CBA. Вычислите градусные меры углов треугольника ABC.

§ 2. Первый признак подобия треугольников

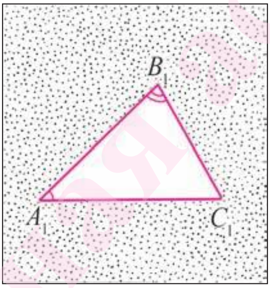
Для того чтобы выяснить, являются ли подобными два треугольника, требуется проверить, равны ли их соответствующие углы и пропорциональны ли лежащие против них стороны.

Вместе с тем, оказывается, что существуют другие более рациональные способы установления подобия треугольников. Рассмотрим один из таких способов.

Теорема (*первый признак подобия*). ***Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.***



а)



б)

Рис. 102

Дано: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 102, *а*, *б*).

Доказать: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство.

Необходимо доказать, что соответствующие углы равны, а соответствующие стороны пропорциональны.

1) Докажем, что соответствующие углы равны. По теореме о сумме градусных мер углов треугольника имеем, что $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$ и $\angle C_1 = 180° - (\angle A_1 + \angle B_1)$. Отсюда следует (с учетом условия теоремы), что $\angle C = \angle C_1$. Таким образом, углы треугольника ABC соответственно равны углам треугольника $A_1B_1C_1$.

2) Докажем, что соответствующие стороны треугольников пропорциональны.

Так как $\angle A = \angle A_1$ и $\angle C = \angle C_1$ то $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$ и

$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{BC \cdot AC}{B_1C_1 \cdot A_1C_1}$.

Отсюда следует, что

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}. \quad (1)$$

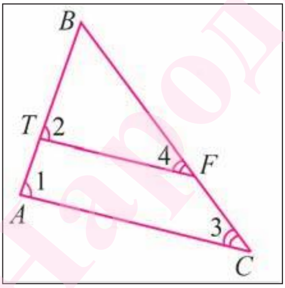
3) Аналогично, используя равенства $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ и теорему **1**, § **1**, главы **3**, получим

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}. \quad (2)$$

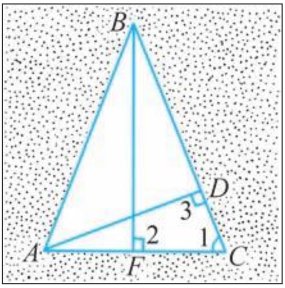
4) Из равенств (1) и (2) следует, что $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, т. е. соответствующие стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ пропорциональны.

Теорема доказана.

Рассмотрим пример. Пусть точки T и F лежат соответственно на сторонах AB и BC треугольника ABC так, что отрезок TF параллелен стороне AC (рис. 103, *а*). Тогда треугольник TBF подобен треугольнику ABC. Действительно, $\angle 1 = \angle 2$ как соответственные при пересечении параллельных прямых TF и AC секущей AB, а $\angle 3 = \angle 4$ как соответственные при пересечении параллельных прямых TF и AC секущей BC. Таким образом, треугольник TBF подобен треугольнику ABC по первому признаку подобия.



а)

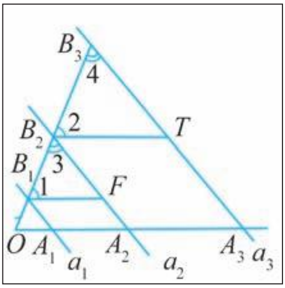


б)

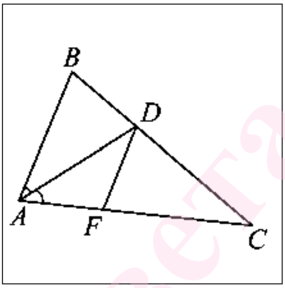
Рис. 103

Рассмотрим еще один пример. Пусть AD и BF — высоты, проведенные соответственно к боковой стороне BC и основанию AC равнобедренного треугольника ABC. Тогда треугольник ADC подобен треугольнику BFC по первому признаку подобия (рис. 103, *б*). Действительно, у этих треугольников $\angle 1$ — общий, а $\angle 3 = \angle 2 = 90°$.

Задача 1 (*обобщенная теорема Фалеса*). Докажите, что параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на его сторонах пропорциональные отрезки.



а)



б)

Рис. 104

Доказательство.

1) Пусть A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 — точки пересечения параллельных прямых a_1, a_2, a_3 со сторонами угла, вершина которого — точка O. Докажем, что $\frac{B_1B_2}{A_1A_2} = \frac{B_2B_3}{A_2A_3}$ (рис. 104, *а*).

2) Проведем отрезки B_1F $(F \in A_2B_2)$ и B_2T $(T \in B_3A_3)$, параллельные прямой OA_3. Тогда треугольник B_1B_2F подобен треугольнику B_2B_3T по первому признаку подобия. Действительно, $\angle 1 = \angle 2$ как соответственные углы при пересечении параллельных прямых B_1F и B_2T секущей OB_3, а $\angle 3 = \angle 4$ как соответственные углы при пересечении параллельных прямых a_2 и a_3 секущей OB_3.

3) Из подобия треугольников B_1B_2F и B_2B_3T следует, что $\frac{B_1B_2}{B_1F} = \frac{B_2B_3}{B_2T}$. Кроме того, $B_1F = A_1A_2$ и $B_2T = A_2A_3$ как противолежащие стороны параллелограммов $A_1B_1FA_2$ и $A_2B_2TA_3$.

Следовательно, $\frac{B_1B_2}{A_1A_2} = \frac{B_2B_3}{A_2A_3}$. Аналогично, можно доказать, что $\frac{B_1B_2}{A_1A_2} = \frac{OB_1}{OA_1}$.

Что и требовалось доказать.

Задача 2. Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC, а отрезок $DF \parallel AB$, $AB = 5$ см, $AC = 15$ см (рис. 104, *б*). Найдите отношение, в котором точка F делит сторону AC, считая от вершины A.

Решение.

1) Так как $DF \parallel AB$, то $\frac{BD}{DC} = \frac{AF}{FC}$.

2) По условию задачи отрезок AD — биссектриса, следовательно, $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$. Таким образом, $\frac{AF}{FC} = \frac{1}{3}$.

Ответ: 1 : 3.

Вопросы к § 2

1. Сформулируйте и докажите первый признак подобия треугольников.

2. Верно ли, что параллельные прямые отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки?

3. Точки A_1 и C_1 — середины сторон AB и BC треугольника ABC соответственно. Верно ли, что треугольники ABC и A_1BC_1 подобны?

4. Верно ли, что прямая, пересекающая две стороны треугольника и параллельная третьей стороне, отсекает треугольник, подобный данному?

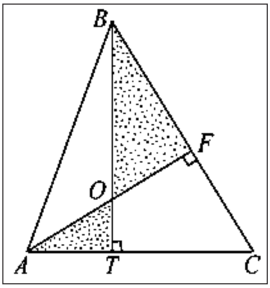
Задачи к § 2

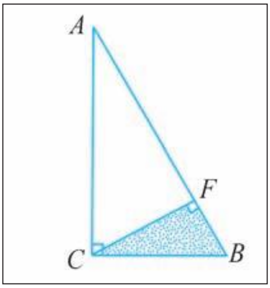
296. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O, а точка F — середина стороны AB. а) Докажите, что треугольники AFO и ABC подобны. б) Верно ли, что треугольники FBO и ABD подобны?

297. В остроугольном треугольнике ABC отрезки BT и AF — высоты, проведенные соответственно к сторонам AC и BC, пересекаются в точке O (рис. 105, *а*). а) Докажите, что треугольники ATO и BFO подобны. б) Верно ли, что треугольник BFO подобен треугольнику BTC?

298. Отрезок CF — высота, проведенная из вершины прямого угла прямоугольного треугольника ACB (рис.105, *б*). а) Докажите, что треугольник BFC подобен треугольнику BCA. б) Верно ли, что треугольник AFC подобен треугольнику ACB?

299. Точка O лежит на стороне BC, а точка T — на стороне AC треугольника ABC. Отрезки OF и OT параллельны





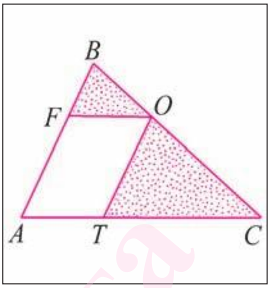


Рис. 105

соответственно сторонам AC и AB (рис. 105, *в*). Докажите, что треугольник FBO подобен треугольнику TOC.

300. Через вершину C параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая сторону AD в точке F, а прямую AB — в точке O. Докажите, что треугольник FDC подобен треугольнику FAO.

301. Диагонали трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники AOD и COB подобны.

302. В остроугольном треугольнике ABC отрезки AO и CF — высоты. Докажите, что треугольник AOB подобен треугольнику CFB.

303. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AC так, что $S_{ABD} : S_{BDC} = 1 : 3$, а точка F лежит на стороне BC так, что отрезок DF параллелен стороне AB. В каком отношении точка F делит сторону BC, считая от точки C?

304. Точки O, F и T лежат соответственно на сторонах BC, AB и AC треугольника ABC, отрезок FO параллелен стороне AC, а отрезок OT параллелен стороне AB. Докажите, что $FB \cdot TC = OT \cdot FO$.

305. Диагонали трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) пересекаются в точке O, а площади треугольников BOC и DOA относятся как $1 : 16$. Вычислите длину основания AD, если $BC = 2$ см.

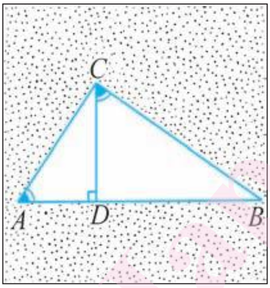
306. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагонали пересекаются в точке O. Вычислите длины оснований трапеции, если их сумма равна 12 см, а $S_{BOC} : S_{DOA} = 1 : 9$.

307. В прямоугольном треугольнике ACB с прямым углом при вершине C отрезок CF — высота, $AF : AC = 1 : 3$. Найдите площадь треугольника ACB, если площадь треугольника AFC равна S.

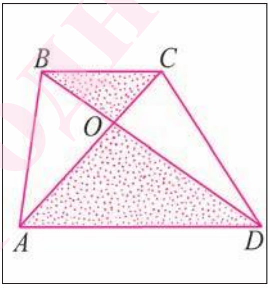
308. Отрезок CD — высота, проведенная к гипотенузе AB прямоугольного треугольника ACB. Докажите, что треугольник ADC подобен треугольнику CDB.

309. В прямоугольном треугольнике ACB с прямым углом при вершине C отрезок CD — высота (рис. 106, *а*). Вычислите длину отрезка CD, если $AB = 100$ мм, $DB = 64$ мм.

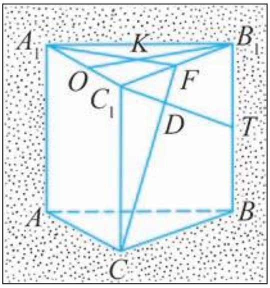
310. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD пересекаются в точке O (рис. 106, *б*). Вычислите длины отрезков AO и OC, если $AC = 20$ см, $P_{BOC} : P_{DOA} = 2 : 3$.



а)



б)



в)

Рис. 106

311. Точки O, F и T — середины соответственно ребер A_1C_1, C_1B_1 и BB_1 прямой призмы, основаниями которой служат равносторонние треугольники, а все ребра призмы равны между собой, $K = A_1F \cap B_1O$, $D = C_1T \cap CF$ (рис 106, *в*). а) Докажите, что треугольник B_1FK подобен треугольнику B_1OC_1. б) Верно ли, что треугольники C_1DF и CC_1F подобны?

312. Отрезок CF — высота, проведенная к гипотенузе AB прямоугольного треугольника ACB. Вычислите площадь треугольника ACB, если $CF = 6$ см, $AF = 3$ см.

313. В параллелограмме $ABCD$ диагональ BD перпендикулярна его стороне AB, отрезок DF — высота, проведенная из вершины D к стороне BC. Вычислите площадь параллелограмма, если $DF = 8$ см, $FC = 4$ см.

314. $ABCD$ — прямоугольная трапеция с прямыми углами при вершинах C и D, у которой диагональ BD перпендикулярна боковой стороне AB. Вычислите площадь трапеции, если $BC = 6$ см, $CD = 12$ см.

315. В остроугольном треугольнике ABC отрезки BO и AF — высоты. Докажите, что выполняется равенство $OC \cdot AC = FC \cdot BC$.

316. В параллелограмме $ABCD$ диагональ BD перпендикулярна стороне AB, отрезок BO — высота, проведенная из вершины B. Вычислите площадь параллелограмма, если $AO = 2$ см, $AB : AD = 1 : 2$.

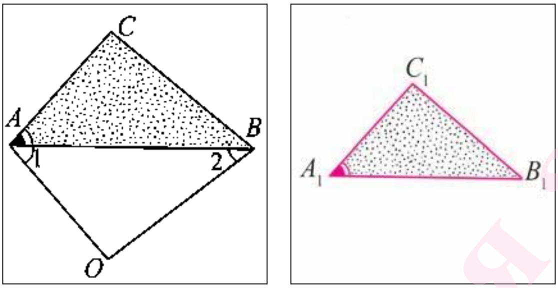
317. Длины оснований трапеции равны 2 см и 4 см, а ее высота — 3 см. Вычислите расстояния от точки пересечения диагоналей трапеции до прямых, содержащих ее основания.

318. Отрезок CF — высота, проведенная из вершины C прямого угла треугольника ABC. Вычислите длины катетов данного треугольника, если $CF = 6$ см, $AB = 13$ см.

§ 3. Второй и третий признаки подобия треугольников

1. Второй признак подобия треугольников. Докажем второй признак подобия треугольников.

Теорема 1 (*второй признак подобия*). ***Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.***



а) б)

Рис. 107

Дано:
$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$,
$\angle A = \angle A_1$,
$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$
(рис. 107, *а*, *б*).

Доказать:
$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство.

1) Рассмотрим треугольник AOB, у которого $\angle 1 = \angle A_1$ и $\angle 2 = \angle B_1$ (см. рис. 107, *а*).

2) Треугольники AOB и $A_1C_1B_1$ подобны по первому признаку подобия треугольников. Следовательно, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AO}{A_1C_1}$.

3) Из равенств $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AO}{A_1C_1}$ следует, что $AC = AO$.

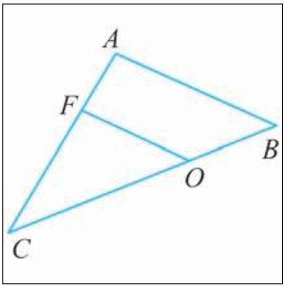
4) Таким образом, треугольник ABC равен треугольнику ABO по двум сторонам и углу между ними (AB — общая сторона, $\angle A = \angle 1$, $AC = AO$).

5) Из равенства треугольников ABC и ABO следует, что $\angle B = \angle 2$. Так как $\angle 2 = \angle B_1$, то $\angle B = \angle B_1$. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны по первому признаку подобия треугольников ($\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$).

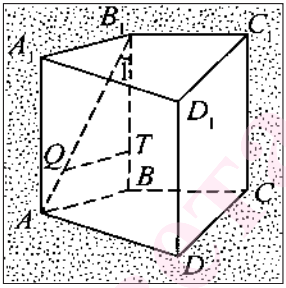
Теорема доказана.

Рассмотрим пример. Пусть точки O и F лежат соответственно на сторонах BC и AC треугольника ABC так, что

$BC = 3BO$ и $AC = 3AF$. Тогда треугольники ABC и FOC подобны по второму признаку, так как у них $\angle C$ — общий, $BC : OC = AC : FC = 3 : 2$ (рис. 108, *а*).



а)



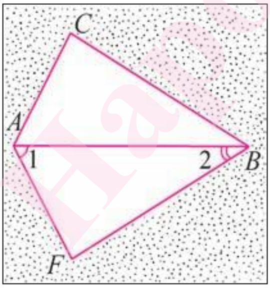
б)

Рис. 108

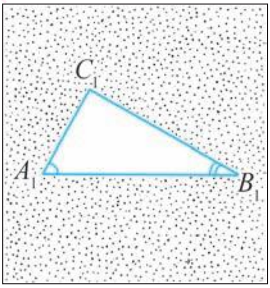
Рассмотрим еще один пример. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая четырехугольная призма, точки T и Q — лежат на отрезках BB_1 и AB_1 соответственно так, что $BT : TB_1 = AQ : QB_1 = 1 : 3$. Тогда треугольники AB_1B и QB_1T, лежащие в грани AA_1B_1B, подобны по второму признаку подобия ($\angle 1$ — общий, $AB_1 : QB_1 = BB_1 : TB_1 = 4 : 3$) (рис. 108, *б*).

2. Третий признак подобия треугольников. Докажем третий признак подобия треугольников.

Теорема 2 (*третий признак подобия*). ***Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.***



а)



б)

Рис. 109

Дано:
$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$,
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$
(рис. 109, *а*, *б*).

Доказать:
$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство.

1) Для доказательства теоремы достаточно доказать, учитывая второй признак подобия треугольников, например, что $\angle A = \angle A_1$.

2) Рассмотрим треугольник AFB, у которого $\angle 1 = \angle A_1$ и $\angle 2 = \angle B_1$. Треугольник ABF подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ по первому признаку подобия треугольников, следовательно, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BF}{B_1C_1} = \frac{FA}{C_1A_1}$.

3) Из равенств $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BF}{B_1C_1} = \frac{FA}{C_1A_1}$ следует, что $BC = BF$ и $AC = AF$, значит, $\triangle ABC = \triangle ABF$ (по трем сторонам).

4) Из равенства треугольников ABC и ABF следует, что $\angle A = \angle 1$. Так как $\angle 1 = \angle A_1$, то $\angle A = \angle A_1$.

Теорема доказана.

Теперь докажем теорему о свойстве медиан треугольника.

Теорема 3 (*о свойстве медиан треугольника*). ***Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины.***

Доказательство.

1) Пусть ABC — произвольный треугольник, AF, BT и CD — медианы треугольника. Докажем, что медианы пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении $2:1$, считая от вершины.

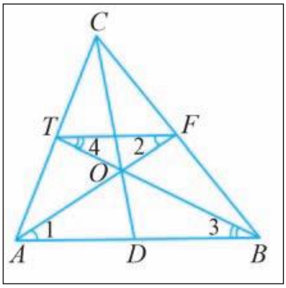


Рис. 110

2) Обозначим буквой O точку пересечения медиан AF и BT треугольника ABC (рис. 110).

3) Так как отрезок TF — средняя линия треугольника ABC, то $TF \parallel AB$, а значит, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$. Отсюда следует, что треугольник AOB подобен треугольнику FOT по двум углам.

4) Из подобия треугольников AOB и FOT следует, что $\frac{AO}{OF} = \frac{BO}{TO} = \frac{AB}{TF}$. Так как отрезок TF — средняя линия, то $\frac{AB}{TF} = 2:1$. Таким образом, $\frac{AO}{OF} = \frac{BO}{TO} = 2:1$. Следовательно, точка O пересечения медиан AF и BT делит каждую из них в отношении $2:1$, считая от вершины.

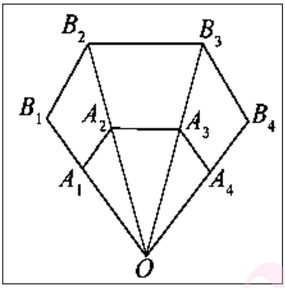
5) Аналогично доказывается, что точка O_1 пересечения медиан BT и CD делит каждую из них в отношении $2:1$, считая

от вершины, а значит, она совпадает с точкой O. Таким образом, все три медианы треугольника ABC пересекаются в точке O и делятся этой точкой в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

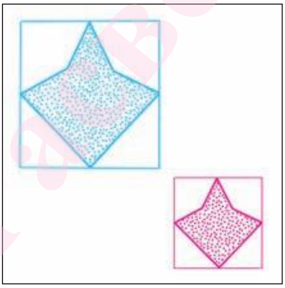
Теорема доказана.

Заметим, что понятие подобия можно определить не только для треугольников, но и для многоугольников.

Пусть два n-угольника $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ и $B_1B_2B_3...B_{n-1}B_n$ такие, что их углы соответственно равны: $\angle A_1 = \angle B_1$, $\angle A_2 = \angle B_2$, ..., $\angle A_n = \angle B_n$. Тогда стороны A_1A_2 и B_1B_2, A_2A_3 и B_2B_3,..., $A_{n-1}A_n$ и $B_{n-1}B_n$ таких n-угольников называются *соответствующими*.



а)



б)

Рис. 111

Определение. **Два n-угольника называются подобными, если между их вершинами можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что соответствующие углы равны, а соответствующие стороны пропорциональны.**

Иначе говоря, два n-угольника $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ и $B_1B_2...B_{n-1}B_n$ называются подобными, если $\angle A_1 = \angle B_1$, $\angle A_2 = \angle B_2$, ..., $\angle A_n = \angle B_n$ и $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = ... \frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n} = k$.

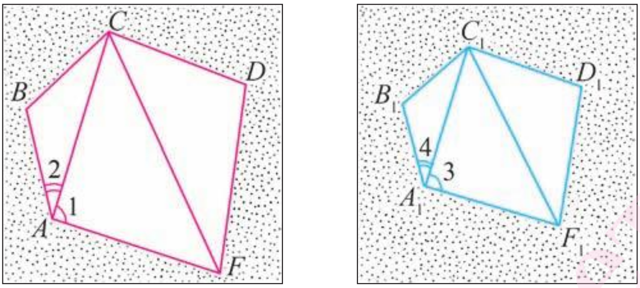
Число k называется *коэффициентом подобия*.

Если n-угольник $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ подобен n-угольнику $B_1B_2B_3...B_{n-1}B_n$, то пишут: $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n \sim B_1B_2B_3...B_{n-1}B_n$.

Например, любые два квадрата являются подобными четырехугольниками. На рисунке 111, *а* изображены подобные пятиугольники $OA_1A_2A_3A_4$ и $OB_1B_2B_3B_4$, а на рисунке 111, *б* изображены подобные шестиугольники.

Для подобных многоугольников, как и для треугольников, отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия.

Задача 1. Докажите, что отношение площадей подобных n-угольников равно квадрату коэффициента подобия.



а) *б)*

Рис. 112

Доказательство.

1) Для определенности доказательство проведем для подобных пятиугольников $ABCDF$ и $A_1B_1C_1D_1F_1$. Пусть их коэффициент подобия равен k (рис. 112, *а*, *б*). Докажем, что $S_{ABCDF} : S_{A_1B_1C_1D_1F_1} = k^2$.

2) Из соответствующих друг другу вершин C и C_1 проведем диагонали CA, CF и C_1A_1, C_1F_1. Каждый из многоугольников разбивается на три треугольника.

3) Треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ по второму признаку подобия треугольников. Действительно, $\angle B = \angle B_1$ как углы подобных пятиугольников $ABCDF$ и $A_1B_1C_1DF_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$.

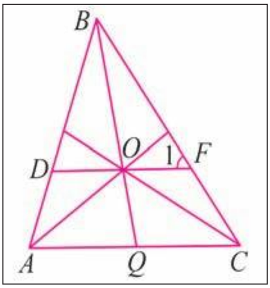
Аналогично можно доказать, что треугольник CDF подобен треугольнику $C_1D_1F_1$ с коэффициентом подобия k.

4) Треугольник ACF подобен треугольнику $A_1C_1F_1$ по второму признаку подобия. В самом деле, $\angle 1 = \angle BAF - \angle 2$, $\angle 3 = \angle B_1A_1F_1 - \angle 4$. Из подобия пятиугольников следует, что $\angle BAF = \angle B_1A_1F_1$. Так как треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, то $\angle 2 = \angle 4$. Таким образом, $\angle 1 = \angle 3$. Кроме того, из подобия данных многоугольников и треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ следует, что $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{CF}{C_1F_1} = k$.

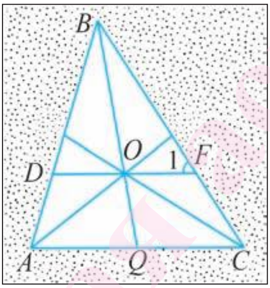
5) Так как пятиугольник $ABCDF$ является объединением треугольников ABC, ACF и CDF, которые не имеют общих внутренних точек, то $S_{ABCDF} = S_{ABC} + S_{ACF} + S_{CDF}$. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффи-

циента подобия, следовательно, $S_{ABC} = k^2 S_{A_1B_1C_1}$, $S_{ACF} = k^2 S_{A_1C_1F_1}$ и $S_{CDF} = k^2 S_{C_1D_1F_1}$. Таким образом, $S_{ABCDF} = k^2 S_{A_1B_1C_1} + k^2 S_{A_1C_1F_1} + k^2 S_{C_1D_1F_1} = k^2 \left(S_{A_1B_1C_1} + S_{A_1C_1F_1} + S_{C_1D_1F_1}\right) = k^2 S_{A_1B_1C_1D_1F_1}$, т. е. $S_{ABCDF} : S_{A_1B_1C_1D_1F_1} = k^2$. Что и требовалось доказать.

Задача 2. Длина стороны AC треугольника ABC равна 12 см. Отрезок DF проходит через точку O пересечения медиан треугольника и параллелен стороне AC, при этом $D \in AB$ и $F \in BC$. Вычислите длину отрезка DF.



а)



б)

Рис. 113

Дано: $\triangle ABC$, O — точка пересечения медиан, $DF \parallel AC$, $O \in DF$, $AC = 12$ см (рис. 113, *а*, *б*).

Вычислить: DF.

Решение.

Для решения задачи можем воспользоваться первым признаком подобия треугольников и тем, что точка пересечения медиан треугольника делит каждую из медиан в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

1) Треугольник ABC подобен треугольнику DBF по двум углам ($\angle ABC$ — общий, $\angle 1 = \angle BCA$ как соответственные углы при пересечении параллельных прямых DF и AC секущей BC).

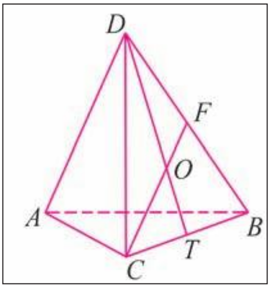
2) Из подобия треугольников ABC и DBF следует, что $BD : BA = BF : BC = DF : AC$.

3) Так как точка O — точка пересечения медиан, то $BO : OQ = 2 : 1$. Из обобщенной теоремы Фалеса (задача **1**, § **2**, глава **3**) следует, что $BD : DA = BO : OQ = 2 : 1$. Таким образом, $BD : BA = 2 : 3$.

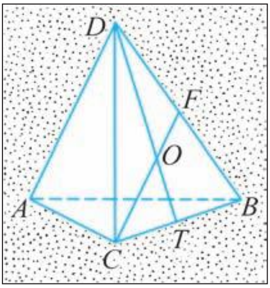
4) Так как $DF : AC = BD : BA = 2 : 3$, то $DF = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8$ (см).

Ответ: 8 см.

Задача 3. Основанием правильной треугольной пирамиды $DABC$ служит равносторонний треугольник, длина стороны которого равна 24 см, а длина бокового ребра пирамиды — 15 см. Вычислите длину отрезка DO, где O — точка пересечения медиан грани DCB.



а)



б)

Рис. 114

Дано: $DABC$ — правильная пирамида (рис. 114, *а, б*),
$T \in CB$, $CT = TB$,
$F \in DB$, $DF = FB$,
$O = DT \cap CF$,
$CB = 24$ см,
$DB = 15$ см.

Вычислить: DO.

Решение.

Воспользуемся тем, что точка пересечения медиан треугольника делит каждую из медиан в отношении 2 : 1, считая от вершины. Таким образом, для решения задачи необходимо прежде всего вычислить длину соответствующей медианы.

1) Каждая боковая грань правильной треугольной пирамиды является равнобедренным треугольником. Медиана DT равнобедренного треугольника DCB, проведенная к его основанию BC, является высотой. Поэтому в прямоугольном треугольнике DTB длина катета $DT = \sqrt{DB^2 - BT^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ (см).

2) Так как медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины, то $DO : OT = 2 : 1$. А это значит, что $DO = \frac{2}{3} DT = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6$ (см).

Ответ: 6 см.

Вопросы к § 3

1. Сформулируйте и докажите второй признак подобия треугольников.

2. Сформулируйте и докажите третий признак подобия треугольников.

3. Верно ли, что все медианы треугольника пересекаются в одной точке?

4. В каком отношении точка пересечения медиан треугольника делит каждую из медиан?

Задачи к § 3

319. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, что $\frac{AO}{OB} = \frac{DO}{OC}$. Докажите, что $\angle CBO = \angle DAO$.

320. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки F и T лежат соответственно на отрезках OC и OD так, что $CF : FO = 1 : 3$ и $DT : TO = 1 : 3$ (рис. 115, *а*). Докажите, что треугольники AOB и FOT подобны.

321. Четырехугольник $ABCD$ — трапеция, диагонали которой пересекаются в точке O. Точки F и E лежат соответственно на отрезках OD и OA так, что $OF = 2BO$ и $OE = 2CO$ (рис. 115, *б*). Верно ли, что треугольники BOC и FOE подобны?

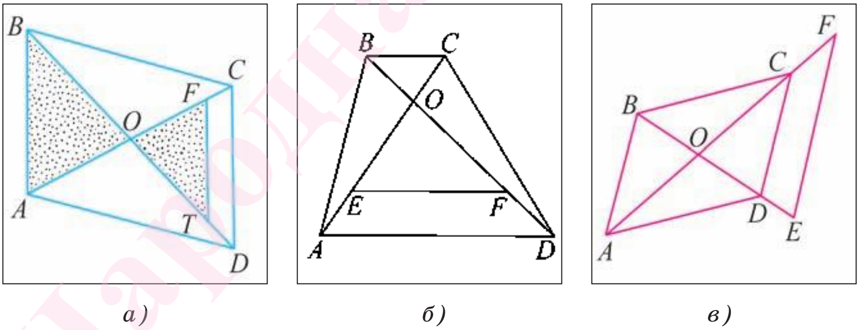


Рис. 115

322. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O, а точки F и E лежат соответственно на лучах OC и OD так, что $OC : CF = OD : DE = 2 : 1$ (рис. 115, *в*). Докажите, что $\angle BAO = \angle EFO$.

323. Отрезки AO и CF — биссектрисы углов A и C при основании равнобедренного треугольника ABC. Докажите, что треугольники ABC и FBO являются подобными.

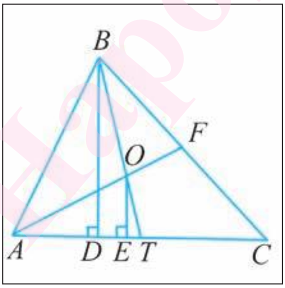
324. Диагонали AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что прямые BC и AD параллельны, если $BO = 16$ см, $AO = 30$ см, $AC = 54$ см и $DO = 20$ см.

325. В треугольнике ABC $AB = 12$ см, $AC = 24$ см, $BC = 16$ см. Точки O и F лежат соответственно на лучах AB и CB так, что $BF = 6$ см и $BO = 8$ см. Вычислите длину отрезка FO.

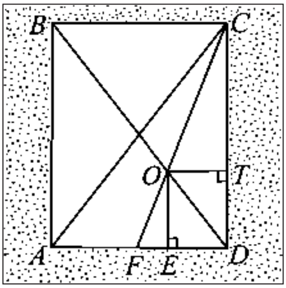
326. Точки O и F лежат соответственно на сторонах AB и BC треугольника ABC. Докажите, что прямые FO и AC параллельны, если $AB = 48$ см, $CB = 32$ см, $AO = 18$ см, $BF = 20$ см.

327. В прямоугольном треугольнике ACB с прямым углом C длины катетов равны 5 см и 12 см, а длины гипотенузы и катета прямоугольного треугольника $A_1C_1B_1$ ($\angle C_1 = 90°$) равны соответственно 26 см и 10 см. Докажите, что треугольники ACB и $A_1C_1B_1$ подобны.

328. Медианы AF и BT треугольника ABC пересекаются в точке O. Отрезки BD и OE — высоты треугольников ABC и AOT соответственно (рис. 116, *а*). Докажите, что $BD = 3OE$.



а)



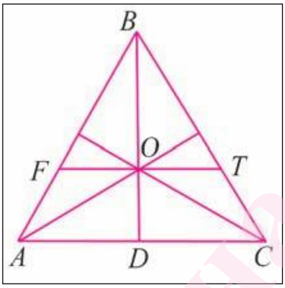
б)

Рис. 116

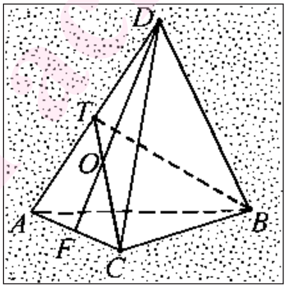
329. Точка F — середина стороны AD прямоугольника $ABCD$, диагональ BD и отрезок CF пересекаются в точке O. Вычислите длины перпендикуляров OT и OE, проведенных из точки O соответственно к сторонам CD и AD прямоугольника, если $AB = 12$ см и $BC = 9$ см (рис. 116, *б*).

330. Точки B_1 и C_1 лежат соответственно на сторонах AB и AC треугольника ABC. Медианы BO и B_1O_1 треугольников ABC и AB_1C_1 параллельны. Докажите, что треугольники BOC и $B_1O_1C_1$ подобны.

331. В равностороннем треугольнике ABC отрезок FT проходит через точку O пересечения медиан и параллелен стороне AC (рис. 117, *а*). Вычислите площадь четырехугольника $AFTC$, если длина стороны треугольника ABC равна $2\sqrt{3}$ см.



а)



б)

Рис. 117

332. $DABC$ — тетраэдр, O — точка пересечения медиан DF и CT грани ADC (рис. 117, *б*). Вычислите длину пространственной трехзвенной ломаной $CTBD$, если $OF = \sqrt{3}$ см.

333. Длина боковой стороны равнобедренного треугольника равна 25 см, а длина его основания — 14 см. Вычислите расстояния от точки пересечения медиан треугольника до его вершин.

334. Длины сторон AB и BC прямоугольника $ABCD$ равны соответственно 3 см и $3\sqrt{2}$ см. Точка K — середина стороны AD, отрезок BK пересекается с диагональю AC в точке T. Докажите, что треугольник ATK является прямоугольным.

335. $ABCD$ — ромб с острым углом A в 60°. Точка F — середина стороны BC. Отрезок AF пересекает диагональ BD в точке O. Вычислите длины отрезков BO и OD, если $AB = 6$ см.

336. Сторона ромба $ABCD$ равна его меньшей диагонали AC. Найдите расстояние между точками пересечения медиан треугольников ABC и ACD, если $AB = a$.

337. Взаимно перпендикулярные отрезки AB и CD пересекаются в точке O, при этом $AO = \frac{1}{4}OB$, $OD = 4OC$. Вычислите градусную меру угла ACO, если $\angle DBO = 37°$.

338. Длины сторон одного пятиугольника равны 6 см, 8 см, 7 см, 12 см и 11 см. Меньшая сторона подобного ему пятиугольника равна 18 см. Вычислите длины других сторон этого пятиугольника.

339. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = 24$ см, $BC = 18$ см, $CD = 30$ см, $AD = 36$ см. Вычислите длины сторон подобного ему четырехугольника, периметр которого равен 324 см.

340. Докажите, что отношение периметров подобных многоугольников равно коэффициенту подобия.

341. Отрезок CF — биссектриса треугольника ABC, отрезок FO ($O \in BC$) параллелен стороне AC. Вычислите длину отрезка FO, если $AC = 300$ см, $BC = 100$ см.

342. Длина основания AC равнобедренного треугольника ABC равна 8 см, а длина его боковой стороны — 12 см, отрезки CE и AF — биссектрисы треугольника. Вычислите длину отрезка EF.

343. Точки O, F и T лежат соответственно на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC так, что $OF \parallel AC$ и $OT \parallel BC$. Найдите площадь треугольника ABC, если $S_{OBF} = S_1$, $S_{AOT} = S_2$.

344. В равнобедренном треугольнике ABC, основание которого AC, через точку пересечения медиан проведена прямая, параллельная основанию. Эта прямая пересекает стороны AB и BC соответственно в точках K и T. Вычислите длины отрезков, на которые точка K делит сторону AB, если $KT = 6$ см, $S_{ABC} = 27$ см^2.

345. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведены высоты BF и AD. Вычислите площадь треугольника FDC, если $FC : DC = 3 : 2$ и $S_{ABC} = 1$ см^2.

346. В параллелограмме $ABCD$ точка K — середина стороны BC. Отрезок AK пересекает диагональ BD в точке O. Вычислите площадь параллелограмма $ABCD$, если площадь треугольника BOK равна 2 см^2.

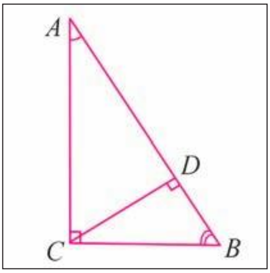
347. Длины сторон треугольника равны a и b, а градусная мера угла между этими сторонами равна $120°$. Найдите длину биссектрисы этого угла треугольника.

348. Периметр равнобедренного треугольника равен 24 см. Высота, проведенная к боковой стороне, отсекает от нее отрезок длиной 2 см, если считать от основания. Вычислите длины сторон треугольника.

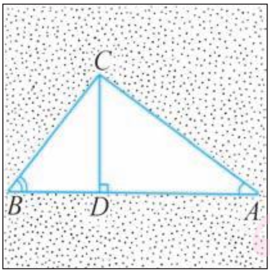
§ 4. Применение подобия к решению задач

1. Свойства высоты прямоугольного треугольника. Рассмотрим применение подобия при решении задач.

Задача 1. Докажите, что высота CD, проведенная к гипотенузе AB прямоугольного треугольника ACB, делит его на два треугольника, подобных данному.



а)



б)

Рис. 118

Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90°$, $CD \perp AB$, $D \in AB$ (рис. 118, *а, б*).

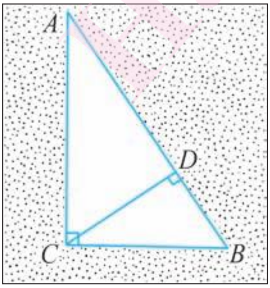
Доказать: $\triangle ADC \sim \triangle ACB$, $\triangle CDB \sim \triangle ACB$.

Доказательство.

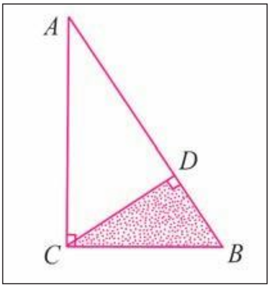
1) Докажем, что $\triangle ADC \sim \triangle ACB$. Треугольники ADC и ACB подобны по первому признаку подобия треугольников, так как $\angle A$ — общий и $\angle ADC = \angle ACB = 90°$.

2) Докажем, что $\triangle CDB \sim \triangle ACB$. Треугольники CDB и ACB подобны по первому признаку треугольников, так как $\angle B$ — общий и $\angle BDC = \angle ACB = 90°$.

Задача 2. Докажите, что высота CD, проведенная к гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, делит его на два подобных треугольника.



а)



б)

Рис. 119

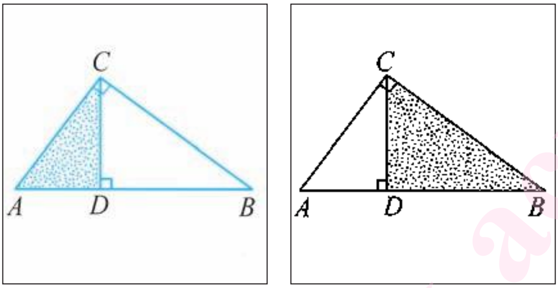
Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90°$, $CD \perp AB$, $D \in AB$ (рис. 119, *а, б*).

Доказать: $\triangle ADC \sim \triangle CDB$.

Доказательство.

Треугольник ADC подобен треугольнику CDB по первому признаку подобия треугольников, так как $\angle ADC = \angle CDB = 90°$ и $\angle CAD = \angle BCD$ (каждый из этих углов равен $90° - \angle CBD$).

Задача 3. Докажите, что квадрат длины катета прямоугольного треугольника равен произведению длины гипотенузы и длины проекции этого катета на гипотенузу.



а) б)

Рис. 120

Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90°$, $CD \perp AB$, $D \in AB$ (рис. 120, *а*, *б*).

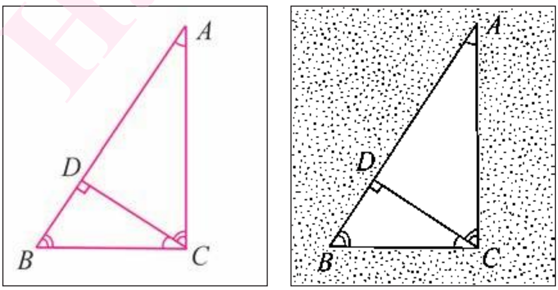
Доказать:
1) $AC^2 = AD \cdot AB$.
2) $BC^2 = BD \cdot AB$.

Доказательство.

1) Треугольник ADC подобен треугольнику ACB, следовательно, $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$, т. е. $AC^2 = AD \cdot AB$.

2) Треугольник BDC подобен треугольнику BCA. Отсюда следует, что $\frac{BC}{AB} = \frac{BD}{BC}$, т. е. $BC^2 = BD \cdot AB$.

Задача 4. Докажите, что квадрат высоты, проведенной к гипотенузе прямоугольного треугольника, равен произведению длин проекций катетов на гипотенузу.



а) б)

Рис. 121

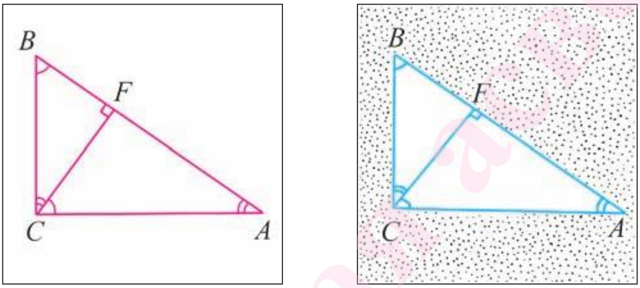
Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90°$, $CD \perp AB$, $D \in AB$ (рис. 121, *а*, *б*).

Доказать: $CD^2 = AD \cdot DB$.

Доказательство.

Треугольник ADC подобен треугольнику CDB, следовательно, $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$. Отсюда получим, что $CD^2 = AD \cdot DB$. Или $CD = \sqrt{AD \cdot DB}$, т. е. CD — *среднее геометрическое* AD и DB.

Задача 5. Вычислите периметр прямоугольного треугольника, если длины проекций его катетов на гипотенузу равны $\frac{18}{5}$ см и $\frac{32}{5}$ см.



а) *б)*

Рис. 122

Решение.

1) Пусть ACB — прямоугольный треугольник, гипотенузой которого является отрезок AB, $CF \perp AB$, $F \in AB$. Тогда по условию задачи $BF = \frac{18}{5}$ см, $FA = \frac{32}{5}$ см (рис. 122, *а*, *б*).

2) Так как квадрат высоты, проведенной к гипотенузе, равен произведению длин проекций катетов на гипотенузу, то $CF^2 = AF \cdot FB$ или $CF = \sqrt{\frac{18}{5} \cdot \frac{32}{5}} = \frac{24}{5}$ (см).

3) В прямоугольном треугольнике CFB длина гипотенузы $CB = \sqrt{BF^2 + CF^2} = 6$ (см).

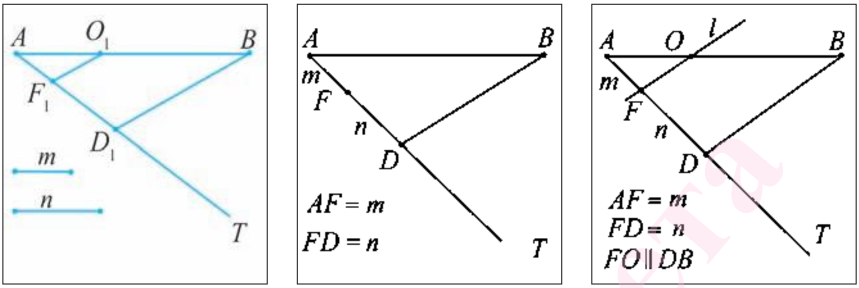
4) В прямоугольном треугольнике CFA длина гипотенузы $CA = \sqrt{FA^2 + CF^2} = 8$ (см).

5) Таким образом, $P_{ABC} = AB + CB + CA = 10 + 6 + 8 = 24$ (см).

Ответ: 24 см.

2. Задачи на построение. Рассмотрим примеры решения задач на построение.

Задача 1. Разделите отрезок AB в отношении $m : n$, считая от точки A, где m и n — данные отрезки.



а) б) в)

Рис. 123

Поиск решения.

Предположим, что точка O_1 делит отрезок AB в таком отношении, в котором находятся данные отрезки, т. е. $AO_1 : O_1B = m : n$ (рис. 123, *а*). На луче AT таком, что угол BAT не является развернутым, отложим отрезки $AF_1 = m$, $F_1D_1 = n$ и проведем отрезки F_1O_1, BD_1. Тогда треугольники AO_1F_1 и ABD_1 подобны по второму признаку ($\angle A$ — общий, $\frac{AO_1}{AB} = \frac{AF_1}{AD_1} = \frac{m}{m+n}$).

Из подобия треугольников AO_1F_1 и ABD_1 следует, что $O_1F_1 \parallel D_1B$.

Воспользуемся этим фактом для осуществления необходимых построений.

Построение.

1) Проводим луч AT (рис. 123, *б*).

2) На луче AT последовательно отложим отрезки $AF = m$ и $FD = n$. Проведем отрезок DB (см. рис. 123, *б*).

3) Через точку F проведем прямую l, параллельную отрезку BD, и отметим точку O ее пересечения с отрезком AB (рис. 123, *в*). Точка O делит отрезок AB в нужном отношении, т. е. $AO : OB = m : n$. Докажем это.

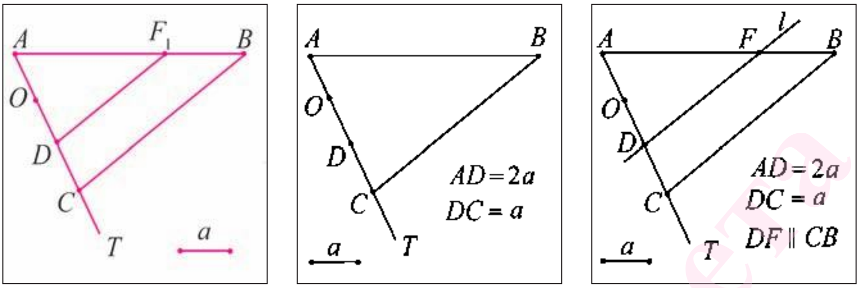
Доказательство.

1) По построению $FO \parallel BD$.

2) Так как $FO \parallel BD$, то $AF : FD = AO : OB$.

3) По построению $AF = m$ и $FD = n$, значит, $AO : OB = m : n$.

Задача 2. Разделите отрезок AB в отношении $2:1$, считая от точки A.



а) *б)* *в)*

Рис. 124

Поиск решения.

Предположим, что точка F_1 делит отрезок AB в отношении $2:1$, т. е. $AF_1 : F_1B = 2:1$ (рис. 124, *а*). На произвольном луче AT таком, что угол BAT не является развернутым, от точки A последовательно отложим три равных отрезка $AO = a$, $OD = a$, $DC = a$ и проведем отрезки CB и DF_1. Треугольник DAF_1 подобен треугольнику CAB по второму признаку подобия $\left(\angle A \text{ — общий, } \frac{AF_1}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{2}{3}\right)$. Из подобия этих треугольников следует, что $DF_1 \parallel CB$. Теперь выполним построение.

Построение.

1) На луче AT отложим последовательно три отрезка, равные некоторому произвольному отрезку a: $AO = a$, $OD = a$, $DC = a$. Проведем отрезок CB (рис. 124, *б*).

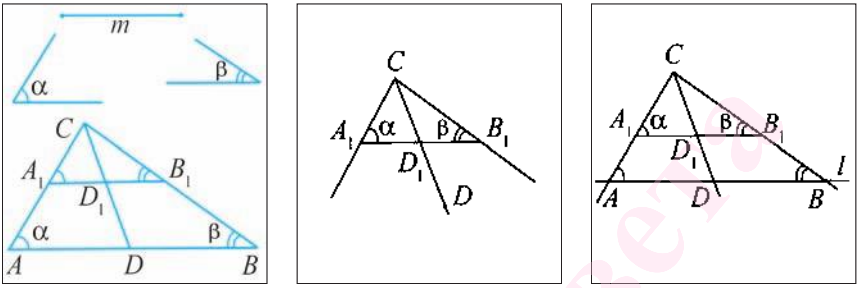
2) Через точку D проведем прямую l, параллельную отрезку CB, и отметим точку F пересечения этой прямой с отрезком AB. Точка F делит отрезок AB в отношении $2:1$, считая от точки A, т. е. $AF : FB = 2:1$ (рис. 124, *в*). Докажем это.

Доказательство.

1) По построению $DF \parallel CB$. Отсюда следует, что $AF : FB = AD : DC$.

2) Кроме того, по построению $AD : DC = 2a : a = 2:1$. Следовательно, $AF : FB = 2:1$.

Задача 3. Постройте треугольник ABC по углам α и β при вершинах A и B соответственно и медиане m, проведенной из вершины C.



а) б) в)

Рис. 125

Поиск решения.

Предположим, что задача решена и треугольник ABC, удовлетворяющий условию задачи, построен, т. е. $\angle CAB = \alpha$, $\angle CBA = \beta$, $AD = DB$, $CD = m$ (рис. 125, *а*). Проведем отрезок A_1B_1, параллельный стороне AB, $A_1 \in CA$, $B_1 \in CB$. Пусть $D_1 = CD \cap A_1B_1$. Тогда треугольник A_1CB_1 подобен треугольнику ACB и $\angle CA_1B_1 = \alpha$, $\angle CB_1A_1 = \beta$. Кроме того, отрезок CD_1 — медиана треугольника A_1CB_1. Таким образом, искомый треугольник ACB подобен треугольнику A_1CB_1 и $AB \parallel A_1B_1$. Точка D лежит на луче CD_1 так, что $CD = m$ ($D \in AB$). Воспользуемся этим для построения треугольника ABC.

Построение.

1) Отложим произвольный отрезок A_1B_1 и построим треугольник A_1CB_1, у которого $\angle CA_1B_1 = \alpha$ и $\angle CB_1A_1 = \beta$ (см. рис. 125, *б*).

2) Делим отрезок A_1B_1 пополам, отметим середину D_1, проведем медиану CD_1. На луче CD_1 отложим отрезок $CD = m$ (см. рис. 125, *б*).

3) Через точку D проведем прямую l, параллельную отрезку A_1B_1, и отметим точки A, B пересечения этой прямой с лучами CA_1 и CB_1 соответственно (см. рис. 125, *в*). Треугольник ABC удовлетворяет условию задачи. Докажем это.

Доказательство.

1) По построению $\angle CA_1B_1 = \alpha$ и $\angle CB_1A_1 = \beta$ и $AB \parallel A_1B_1$. Следовательно, $\angle CAB = \angle CA_1B_1 = \alpha$ и $\angle CBA = \angle CB_1A_1 = \beta$.

2) По построению отрезок CD_1 — медиана треугольника CA_1B_1, т. е. $A_1D_1 = D_1B_1$. Так как $AB \parallel A_1B_1$, то $AD : DB = A_1D_1 : D_1B_1 = 1 : 1$, т. е. отрезок CD — медиана треугольника CAB. Кроме того, по построению $CD = m$. Таким образом, треугольник ACB удовлетворяет всем условиям задачи.

Задача 4. Постройте треугольник ABC, у которого угол A равен данному углу α, высота, проведенная из вершины A, равна данному отрезку h и $AB : AC = m : n$, где m, n — данные отрезки.

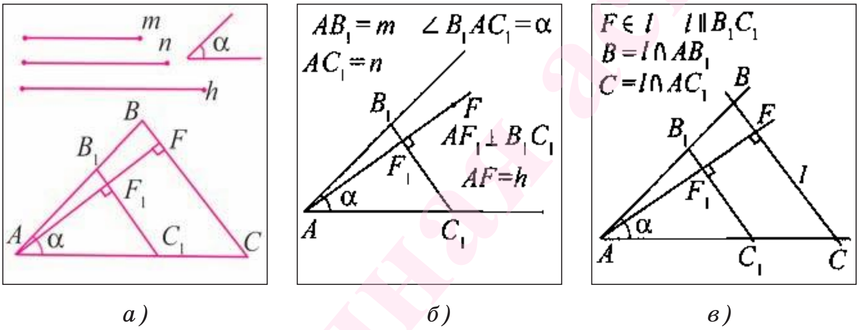


Рис. 126

Поиск решения.

Предположим, что задача решена и треугольник ABC, удовлетворяющий условию задачи, построен, т. е. $\angle BAC = \alpha$, $AB : AC = m : n$, $AF \perp BC$, $F \in BC$, $AF = h$ (рис. 126, *а*). На лучах AB и AC отложим отрезки $AB_1 = m$ и $AC_1 = n$. Тогда треугольник AB_1C_1 подобен треугольнику ABC, так как у них $\angle A$ — общий и $AB : AB_1 = AC : AC_1$. Отсюда следует, что $BC \parallel B_1C_1$ и BC проходит через точку F, лежащую на луче AF_1, где AF_1 — высота треугольника AB_1C_1. Теперь осуществим построение.

Построение.

1) Строим треугольник AB_1C_1 по сторонам $AB_1 = m$, $AC_1 = n$ и углу между ними α (рис. 126, *б*).

2) Строим высоту AF_1 треугольника AB_1C_1 и на луче AF_1 отложим отрезок $AF = h$ (рис. 126, *б*).

3) Через точку F проведем прямую l, параллельную отрезку B_1C_1 и отметим точки B, C пересечения этой прямой с лучами AB_1 и AC_1 соответственно (рис. 126, *в*). Треугольник ABC — искомый. Докажем, что построенный треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи.

Доказательство.

1) По построению $\angle BAC = \alpha$.

2) Так как по построению $BC \parallel B_1C_1$, то $\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}$ или $\frac{AB}{AC} = \frac{AB_1}{AC_1}$. Кроме того, по построению $AB_1 = m$ и $AC_1 = n$.

Следовательно, $\frac{AB}{AC} = \frac{m}{n}$.

3) Отрезок $AF \perp BC$, так как по построению $AF_1 \perp B_1C_1$ и $BC \parallel B_1C_1$. По построению $AF = h$. Таким образом, высота AF треугольника ABC равна h. Треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи.

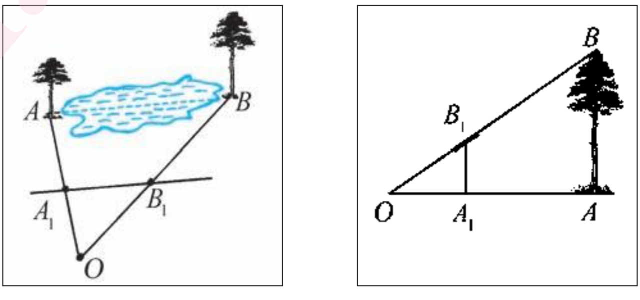
3. Задачи практического характера.

В практической деятельности человека часто возникает необходимость в нахождении расстояний между объектами и высот зданий не непосредственным измерением, а с помощью вычислений, при которых используются свойства подобных треугольников.

Рассмотрим некоторые практические задачи.

1. Нахождение расстояния между объектами на местности.

Рассмотрим задачу нахождения расстояния между двумя деревьями A и B, невозможность нахождения которого непосредственно обусловлена рельефом местности (рис. 127, *а*).



а) *б)*

Рис. 127

Например, найти расстояние между деревьями можно следующим образом.

1) Выбрать на местности некоторую точку O так, чтобы расстояние между этой точкой и точками A и B можно было измерить.

2) Предположим, что $OA = 200$ м и $OB = 300$ м. На лучах OA_1 и OB_1 отложим соответственно, например, отрезки $OA_1 = \frac{1}{5}OA = 40$ (м) и $OB_1 = \frac{1}{5}OB = 60$ м. Измерим расстояние A_1B_1. Допустим $A_1B_1 = 30$ м.

3) Треугольник A_1OB_1 подобен треугольнику AOB, так как у них $\angle O$ — общий и $\frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB} = \frac{1}{5}$. Следовательно, $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{1}{5}$ и $AB = 5A_1B_1 = 150$ (м).

2. **Определение высоты предмета.**

Предположим, что нам нужно определить высоту дерева (рис. 127, *б*).

Нахождение высоты дерева можно осуществить следующим образом.

1) На некотором расстоянии от дерева поставить вертикально шест A_1B_1 с вращающейся планкой. Направить планку на верхнюю точку B дерева и отметить на поверхности земли точку O, в которой прямая BB_1 пересекает поверхность земли.

2) Измерить высоту шеста A_1B_1, а также расстояния OA и OA_1.

3) Треугольник OAB подобен треугольнику OA_1B_1, так как $\angle OA_1B_1 = \angle OAB = 90°$ и $\angle O$ — общий. Следовательно, $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{OA_1}{OA}$. Отсюда получим, что $AB = \frac{A_1B_1 \cdot OA}{OA_1}$.

Вопросы к § 4

1. Верно ли, что высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит его на два треугольника, каждый из которых подобен данному треугольнику?

2. Верно ли, что высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит его на два подобных треугольника?

3. Верно ли, что квадрат длины катета прямоугольного треугольника равен произведению длины гипотенузы и длины проекции этого катета на гипотенузу?

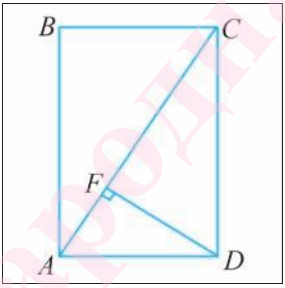
4. Чему равен квадрат высоты, проведенной к гипотенузе прямоугольного треугольника?

Задачи к § 4

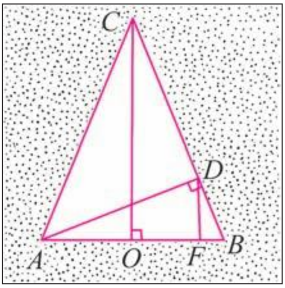
349. В прямоугольном треугольнике ABC длина катета BC равна 13 см, а высота CD, проведенная к гипотенузе AB, равна 12 см. Вычислите длину проекции катета BC на гипотенузу и длину катета AC.

350. Высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна 5 см, а длина одного из катетов — 13 см. Вычислите длину гипотенузы треугольника.

351. В прямоугольнике $ABCD$ длина стороны CD равна 5 см, а длина перпендикуляра DF, проведенного из вершины D к диагонали AC, равна 3 см (рис. 128, *а*). Вычислите периметр прямоугольника.



а)



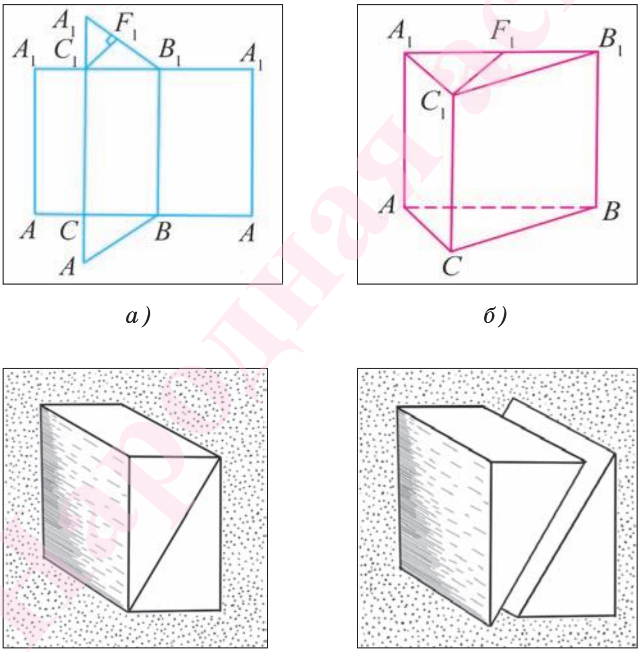
б)

Рис. 128

352. Высота AD, проведенная к боковой стороне CB равнобедренного треугольника ABC, делит эту сторону в отношении 1 : 3, считая от вершины B. Вычислите длину отрезка DF ($F \in AB$), параллельного высоте CO, если $AB = 24$ см (рис. 128, *б*).

353. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O. Отрезок BO служит диаметром окружности, которая пересекает сторону BC в точке E. Вычислите площадь ромба, если $OE = 12$ см и $AC = 30$ см.

354. На рисунке 129, *а* изображена развертка прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 129, *б*), основаниями которой служат прямоугольные треугольники $A_1C_1B_1$ и ACB ($\angle ACB = 90°$). Представление о такой призме дают модели, которые получаются при распиливании модели прямоугольного параллелепипеда вдоль ребра, как показано на рисунке 129, *в*, *г*. Вычислите площадь грани AA_1B_1B, если высота C_1F_1 треугольника $A_1C_1B_1$ равна 6 см, $F_1B_1 = 9$ см, а площадь грани CC_1B_1B равна $30\sqrt{13}$ см^2.



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 129

355. Данный отрезок AB разделите в отношении $1 : 2 : 4$.

356. Постройте треугольник ABC по углам α и β при вершинах A и B и высоте h, проведенной из вершины C.

357. Постройте треугольник ABC по углам α и β при вершинах A и B соответственно и биссектрисе c, проведенной из вершины C.

358. Постройте треугольник ABC по данному углу C, отношению сторон $CA : CB = 2 : 3$ и биссектрисе m, проведенной из вершины C.

359. Постройте ромб, диагонали которого относятся как $m : n$, где m, n — данные отрезки, а сторона равна данному отрезку a.

360. Отрезок AB — диаметр окружности, точка C — точка, лежащая на окружности, CF — перпендикуляр, проведенный из точки C к прямой AB. Вычислите площадь треугольника ABC, если $FB = 9$ см и $CF = 4$ см.

361. Сторона AD прямоугольника $ABCD$ является диаметром окружности, которая пересекает диагональ DB прямоугольника в точке K так, что $DK : KB = 1 : 3$. Длина перпендикуляра, проведенного из точки A к диагонали BD, равна 6 см. Вычислите площадь прямоугольника.

362. Длина средней линии равнобедренной трапеции равна 9 см, а ее площадь — 54 см^2. Вычислите длины оснований трапеции, если диагонали трапеции перпендикулярны боковым сторонам.

363. Высота прямоугольного треугольника делит его на треугольники с периметрами p_1 и p_2. Найдите периметр данного треугольника.

364. Высота прямоугольного треугольника делит его на треугольники, у которых радиусы вписанных окружностей равны r_1 и r_2. Найдите радиус окружности, вписанной в данный треугольник.

365. Высота CF, проведенная из вершины прямого угла треугольника ACB к гипотенузе AB, в три раза меньше катета CB. Найдите длину медианы FT треугольника AFC, если $AB = a$.

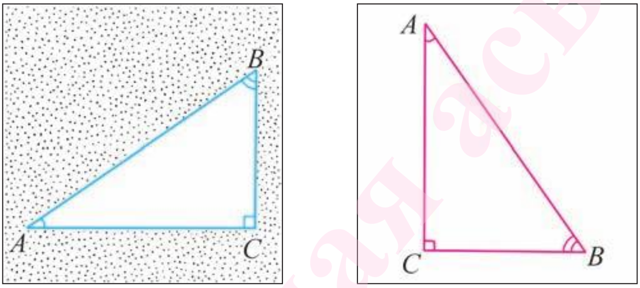
§ 5. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

1. Синус, косинус, тангенс и котангенс угла прямоугольного треугольника.

Пусть ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине C.

Катет BC является *противолежащим углу* A, а *катет* AC — *прилежащим* к этому углу.

Катет BC является *прилежащим к углу* B, а *катет* AC — *противолежащим углу* B (рис. 130, *а*, *б*).



а) *б)*

Рис. 130

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Синус угла α обозначается $\sin\alpha$ (читается «синус альфа»).

Для прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C: $\sin A = \frac{BC}{AB}$, $\sin B = \frac{AC}{AB}$.

Отсюда получим, что *длина катета, противолежащего углу, равна произведению длины гипотенузы на синус этого угла*: $BC = AB \sin A$, $AC = AB \sin B$.

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Косинус угла α обозначается $\cos\alpha$ (читается «косинус альфа»).

Для прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C: $\cos A = \frac{AC}{AB}$, $\cos B = \frac{BC}{AB}$.

Отсюда следует, что *длина катета, прилежащего к углу, равна произведению длины гипотенузы на косинус этого угла*: $AC = AB\cos A$, $BC = AB\cos B$.

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему.

Тангенс угла α обозначается $\operatorname{tg}\alpha$ (читается «тангенс альфа»).

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C: $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$, $\operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC}$.

Заметим, что $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{AB} : \frac{AC}{AB} = \frac{\sin A}{\cos A}$, $\operatorname{tg} B = \frac{\sin B}{\cos B}$.

Отсюда следует, что *длина катета, противолежащего углу, равна произведению длины другого катета на тангенс этого угла*: $BC = AC\operatorname{tg} A$, $AC = BC\operatorname{tg} B$.

Котангенсом *острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к противолежащему.*

Котангенс угла α обозначается $\operatorname{ctg}\alpha$ (читается «котангенс альфа»).

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C: $\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}$, $\operatorname{ctg} B = \frac{BC}{AC}$.

Заметим, что $\operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A}$, $\operatorname{ctg} B = \frac{\cos B}{\sin B}$.

Отсюда получим, что *длина катета, прилежащего к углу, равна произведению длины другого катета на котангенс этого угла*: $AC = BC\operatorname{ctg} A$, $BC = AC\operatorname{ctg} B$.

Теорема 1. ***Если ABC и $A_1B_1C_1$ — два прямоугольных треугольника с прямыми углами C и C_1 такие, что $\angle A = \angle A_1$, то $\sin A = \sin A_1$, $\cos A = \cos A_1$, $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} A_1$ и $\operatorname{ctg} A = \operatorname{ctg} A_1$.***

Доказательство.

1) Из условия теоремы следует, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ являются подобными по первому признаку подобия.

2) Из подобия треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ следует, что выполняются равенства $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$.

3) Из равенства $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ следует, что $\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1}$, т. е. $\sin A = \sin A_1$.

4) Из равенств $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$ получим, что $\frac{CA}{AB} = \frac{C_1A_1}{A_1B_1}$, т. е. $\cos A = \cos A_1$.

5) Из равенств $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$ получим, что $\frac{BC}{CA} = \frac{B_1C_1}{C_1A_1}$, т. е. $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} A_1$. Отсюда вытекает, что $\operatorname{ctg} A = \operatorname{ctg} A_1$.

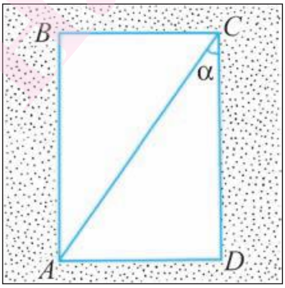
Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что в *прямоугольном треугольнике отношение двух сторон не зависит от их длин, а зависит лишь от величины острого угла*.

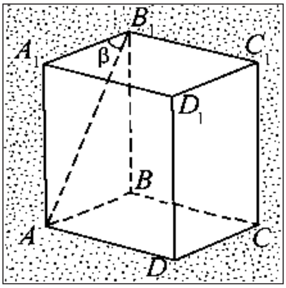
Каждому значению острого угла α соответствует только одно значение $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ этого угла, так как в прямоугольном треугольнике для каждого угла, независимо от длин его сторон, можно найти единственное отношение. Таким образом по определению функции получаем, что $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ являются функциями угла α. Эти функции называются ***тригонометрическими функциями***, так как связаны с измерениями в треугольнике.

Рассмотрим примеры. Пусть необходимо найти площадь прямоугольника $ABCD$, у которого диагональ $AC = m$ и образует со стороной CD угол, равный α (рис. 131, *а*).

Катет AD лежит против угла α, следовательно, его длина равна произведению длины гипотенузы на синус этого угла, т. е. $AD = m\sin\alpha$. Длина прилежащего к углу α катета CD равна произведению длины гипотенузы на косинус этого угла, т. е. $CD = m\cos\alpha$. Таким образом, $S_{ABCD} = AD \cdot CD = m^2 \sin\alpha\cos\alpha$.



а)



б)

Рис. 131

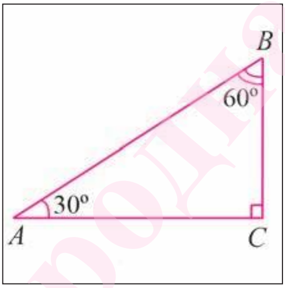
Пусть требуется найти площадь боковой грани прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, основаниями которой служат квадраты $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что $S_{ABCD} = Q$, а диагональ AB_1 боковой грани образует с ребром A_1B_1 основания угол, равный β (рис. 131, *б*).

Данная призма прямая, а ее основаниями служат квадраты, значит, все боковые грани призмы являются равными прямоугольниками. Таким образом, $S_{AA_1B_1B} = AA_1 \cdot A_1B_1$. Так как $S_{A_1B_1C_1D_1} = Q$, то $A_1B_1 = \sqrt{Q}$. В прямоугольном треугольнике AA_1B_1 угол A_1B_1A равен β, следовательно, длина противолежащего ему катета $AA_1 = \sqrt{Q}\operatorname{tg}\beta$. Получим $S_{AA_1B_1B} = Q\operatorname{tg}\beta$.

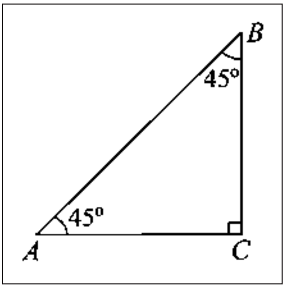
2. Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для углов 30°, 60° и 45°.

I. ***Синус, косинус, тангенс и котангенс угла 30°.***

Пусть ABC — прямоугольный треугольник, у которого угол C — прямой, $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$ (рис. 132, *а*).



а)



б)

Рис. 132

1) Имеем $\sin 30° = \sin A = \frac{BC}{AB}$. Катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы, следовательно, $\frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$. Таким образом, $\sin 30° = \frac{1}{2}$.

2) $\cos 30° = \cos A = \frac{AC}{AB}$. Из теоремы Пифагора следует, что $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$. Значит, $\cos 30° = \frac{AB\sqrt{3}}{2} : AB = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) Теперь найдем тангенс и котангенс угла 30°: $\operatorname{tg} 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{ctg} 30° = \frac{\cos 30°}{\sin 30°} = \sqrt{3}$.

II. ***Синус, косинус, тангенс и котангенс угла 60°.***

1) Можем записать, что $\sin 60° = \sin B = \frac{AC}{AB}$. Так как $AC = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$, следовательно, $\sin 60° = AC : AB = \frac{AB\sqrt{3}}{2} : AB = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) $\cos 60° = \cos B = \frac{BC}{AB}$. Поскольку $BC = \frac{AB}{2}$, то $\cos 60° = \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{2} : AB = \frac{1}{2}$.

3) $\operatorname{tg} 60° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}$; $\operatorname{ctg} 60° = \frac{\cos 60°}{\sin 60°} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

III. ***Синус, косинус, тангенс и котангенс угла 45°.***

Пусть ABC — равнобедренный прямоугольный треугольник с прямым углом C (рис. 132, *б*). В этом треугольнике $AC = BC$, $\angle A = \angle B = 45°$.

1) $\sin 45° = \sin A = \frac{BC}{AB}$. По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2BC^2$. Следовательно, $BC = AC = \frac{AB}{\sqrt{2}}$. Таким образом, $\sin 45° = \frac{AB}{\sqrt{2}} : AB = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) $\cos 45° = \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{AB}{\sqrt{2}} : AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3) $\operatorname{tg} 45° = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$, $\operatorname{ctg} 45° = \frac{\cos 45°}{\sin 45°} = 1$.

3. Основное тригонометрическое тождество.

Докажем, что для острого угла α справедливо следующее равенство: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Пусть в прямоугольном треугольнике $ACB(\angle C = 90°)$ и $\angle A = \alpha$.

Так как $\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$ и $\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$, то $\sin^2\alpha = \frac{BC^2}{AB^2}$ и $\cos^2\alpha = \frac{AC^2}{AB^2}$. Таким образом, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2}$. По теореме Пифагора $BC^2 + AC^2 = AB^2$. Следовательно, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Равенство $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ называется *основным тригонометрическим тождеством*.

4. Изменение синуса, косинуса, тангенса и котангенса при возрастании острого угла.

Заметим, что

$$\sin 30° < \sin 45° < \sin 60°, \text{ а } \cos 30° > \cos 45° > \cos 60°.$$

Таким образом, можем предположить, что при увеличении острого угла *синус* этого угла увеличивается, а *косинус* угла уменьшается. Докажем следующее утверждение.

Теорема 2. ***При возрастании острого угла синус этого угла увеличивается, а косинус уменьшается.***

Доказательство.

I. *Докажем, что при возрастании острого угла синус этого угла увеличивается.*

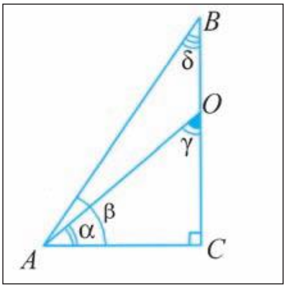


Рис. 133

1) Пусть ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом C (рис. 133). Пусть точка O — внутренняя точка катета BC, $\angle BAC = \beta$, $\angle OAC = \alpha$. Заметим, что $\beta > \alpha$.

2) Пусть $\angle AOC = \gamma$ и $\angle ABC = \delta$. Так как γ — внешний угол треугольника AOB, то $\gamma > \delta$.

3) Докажем, что $\sin\gamma > \sin\delta$. Так как $\sin\gamma = \frac{AC}{AO}$ и $\sin\delta = \frac{AC}{AB}$, то нужно доказать, что $\frac{AC}{AO} > \frac{AC}{AB}$.

4) По теореме Пифагора имеем, что $AO = \sqrt{AC^2 + CO^2}$ и $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2}$. Так как $CO < CB$, то $AO < AB$.

5) Так как дроби $\frac{AC}{AO}$ и $\frac{AC}{AB}$ имеют равные числители, а знаменатель первой дроби меньше знаменателя второй дроби, то $\frac{AC}{AO} > \frac{AC}{AB}$, т. е. $\sin\gamma > \sin\delta$. Таким образом, $\gamma > \delta$, а $\sin\gamma > \sin\delta$. Что и требовалось доказать.

II. *Докажем, что при возрастании острого угла косинус угла уменьшается.*

1) Имеем $\beta > \alpha$. Докажем, что $\cos\beta < \cos\alpha$. Так как $\cos\beta = \frac{AC}{AB}$ и $\cos\alpha = \frac{AC}{AO}$, то нужно доказать, что $\frac{AC}{AB} < \frac{AC}{AO}$.

2) Дроби $\frac{AC}{AB}$ и $\frac{AC}{AO}$ имеют равные числители, а знаменатель первой дроби больше знаменателя второй дроби, то $\frac{AC}{AB} < \frac{AC}{AO}$, т. е. $\cos\beta < \cos\alpha$.

Аналогично можно доказать, что при возрастании острого угла тангенс угла увеличивается, а котангенс уменьшается.

Замечание. *Из теоремы **2** следует, что каждому значению тригонометрической функции соответствует единственный угол.*

Ранее уже было отмечено, что значению градусной меры угла соответствует единственное значение каждой тригонометрической функции.

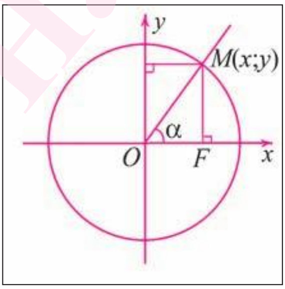
Значение тригонометрической функции по градусной мере угла или градусную меру угла по значению тригонометрической функции можно находить с помощью таблицы (см. Приложение) или с помощью микрокалькулятора. Например, если угол $\alpha = 28°$, то, воспользовавшись таблицей, найдем, что $\sin 28° \approx 0{,}46947$, а $\cos 28° \approx 0{,}88295$. Если $\sin\alpha \approx 0{,}60182$, тогда угол $\alpha \approx 37°$.

5. Синус, косинус, тангенс и котангенс угла от 0° до 180°.

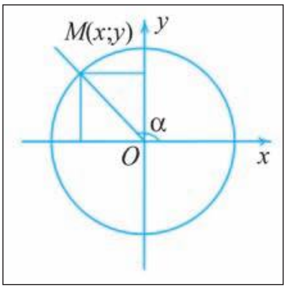
Определим синус, косинус, тангенс и котангенс угла от 0°до 180°.

Пусть на плоскости выбрана прямоугольная система координат Oxy и $\omega(O, R)$ — окружность с центром в точке O и радиуса R.

Пусть α — градусная мера угла, сторонами которого служат лучи Ox и OM, где M — произвольная точка верхней полуокружности, $(x; y)$ — координаты этой точки (рис. 134, *а*, *б*).



а)



б)

Рис. 134

Синусом угла α называется отношение ординаты точки M к радиусу окружности $\omega(O, R)$, т. е. $\sin\alpha = \frac{y}{R}$.

Из определения следует, что $\sin 0^\circ = 0$, $\sin 90^\circ = 1$, $\sin 180^\circ = 0$.

Косинусом угла α называется отношение абсциссы точки M к радиусу окружности $\omega(O, R)$, т. е. $\cos\alpha = \frac{x}{R}$.

В силу определения ясно, что $\cos 0^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$.

Тангенсом угла α называется отношение ординаты точки M к ее абсциссе, т. е. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, $x \neq 0$.

Котангенсом угла α называется отношение абсциссы точки M к ее ординате, т. е. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$, $y \neq 0$.

Для угла α справедливо основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Действительно, $\sin\alpha = \frac{y}{R}$, $\cos\alpha = \frac{x}{R}$, следовательно, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{y}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{R^2}$. Так как $x^2 + y^2 = R^2$, то получим, что $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Заметим, что данные здесь определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для угла от 0° до 180° в случае, если угол α острый, равносильны определениям, данным в пункте 1 данного параграфа. Докажем это, например, для синуса угла. Пусть точка F — основание перпендикуляра, проведенного из точки M к оси Ox. Тогда в прямоугольном треугольнике OFM катет $MF = y$, а гипотенуза $OM = R$ (см. рис. 134, *а*). Следовательно, $\sin\alpha = \frac{y}{R} = \frac{MF}{OM}$.

Найдем связь между тангенсом, котангенсом, синусом и косинусом одного и того же аргумента.

По определению $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$. Так как $y = R\sin\alpha$, $x = R\cos\alpha$, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{R\sin\alpha}{R\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $(\cos\alpha \neq 0)$.

Аналогично $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{R\cos\alpha}{R\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $(\sin\alpha \neq 0)$.

Найдем связь между тангенсом и синусом, котангенсом и косинусом одного и того же аргумента.

Разделим обе части тождества $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ на $\cos^2\alpha$, получим: $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $(\cos\alpha \neq 0)$.

Разделим обе части равенства $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ на $\sin^2\alpha$, получим: $1 + \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$, $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $(\sin\alpha \neq 0)$.

Можно доказать, что справедливы формулы (формулы приведения) для угла $180° - \alpha$: $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, где α — острый угол.

Например, $\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, а $\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\dfrac{1}{2}$.

Для углов $90 \pm \alpha$ также справедливы формулы приведения:

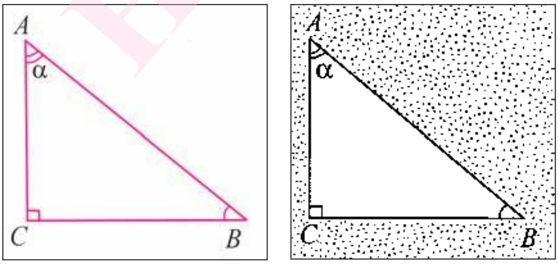
$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, $\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$ и $\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$, где α — острый угол.

6. Решение прямоугольных треугольников.

Тригонометрические функции острого угла выражают соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника. Эти соотношения позволяют решать задачи на нахождение, например: а) неизвестных сторон треугольника, если известна одна из его сторон и острый угол; б) острых углов и третьей стороны, если известны две другие стороны. Такие задачи называются задачами на *решение прямоугольных треугольников*.

Рассмотрим некоторые примеры решения задач.

Задача 1 (*нахождение элементов треугольника по гипотенузе и острому углу*). В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза $AB = c$ и $\angle BAC = \alpha$. Найдите катеты и другой острый угол.



а) *б)*

Рис. 135

Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90°$, $AB = c$, $\angle BAC = \alpha$ (рис. 135, *а*, *б*).

Найти: AC, CB, $\angle B$.

Решение.

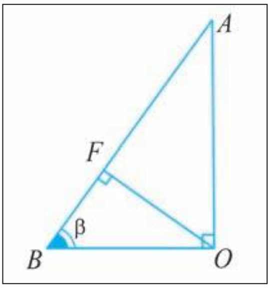
1) $\angle B = 90° - \alpha$.

2) Катет, лежащий против угла α, равен произведению гипотенузы на синус этого угла, т. е. $CB = AB \sin\alpha = c \sin\alpha$.

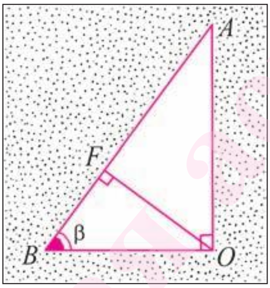
3) $\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{c}$. Следовательно, $AC = c\cos\alpha$.

Ответ: $c\cos\alpha$, $c\sin\alpha$, $90° - \alpha$.

Задача 2. В прямоугольном треугольнике AOB с прямым углом O гипотенуза $AB = a$, а $\angle ABO = \beta$. Найдите высоту OF треугольника AOB (рис. 136, *а, б*).



а)



б)

Рис. 136

Дано: $\triangle ABO$,
$\angle AOB = 90°$,
$OF \perp AB$, $F \in AB$,
$\angle ABO = \beta$, $AB = a$.

Найти: FO.

Решение.

Для решения задачи можем воспользоваться определением синуса и косинуса острого угла прямоугольного треугольника.

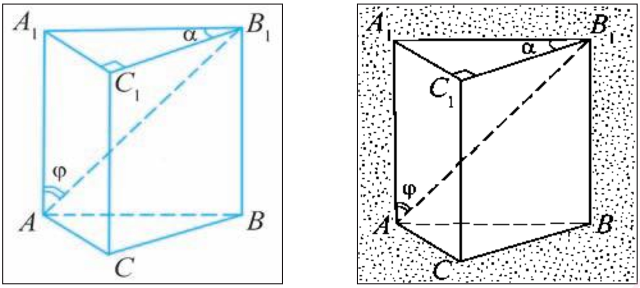
1) В прямоугольном треугольнике OFB катет FO лежит против угла β, следовательно, он равен произведению гипотенузы на синус угла β, т. е. $FO = BO \sin\beta$. Таким образом, необходимо найти BO.

2) В прямоугольном треугольнике AOB отрезок BO — катет, прилежащий к углу β, значит, $BO = AB\cos\beta = a\cos\beta$.

3) Следовательно, $FO = BO\sin\beta = a\cos\beta\sin\beta$.

Ответ: $a\ cos\beta\sin\beta$.

Задача 3. $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма, основание которой прямоугольный треугольник $A_1C_1B_1$ ($\angle A_1C_1B_1 = 90°$), в котором $\angle A_1B_1C_1 = \alpha$ и катет $B_1C_1 = b$. Найдите площадь грани AA_1C_1C, если диагональ AB_1 образует с ребром AA_1 угол φ (рис. 137, *а, б*).



а) б)

Рис. 137

Решение.

Так как данная призма есть прямая призма, то каждая ее грань является прямоугольником. Следовательно, $S_{AA_1C_1C} = AA_1 \cdot A_1C_1$. Для нахождения AA_1 и A_1C_1 можем воспользоваться тем, что AA_1 — катет треугольника AA_1B_1, а A_1C_1 — катет треугольника $A_1C_1B_1$.

1) В треугольнике $A_1C_1B_1$ $A_1C_1 = B_1C_1 \operatorname{tg}\alpha = b\operatorname{tg}\alpha$.

2) В треугольнике $A_1C_1B_1$ $A_1B_1 = \dfrac{B_1C_1}{\cos\alpha} = \dfrac{b}{\cos\alpha}$.

3) В треугольнике AA_1B_1 $AA_1 = A_1B_1 \operatorname{ctg}\varphi = \dfrac{b\operatorname{ctg}\varphi}{\cos\alpha}$.

4) Таким образом, $S_{AA_1C_1C} = \dfrac{b\operatorname{ctg}\varphi}{\cos\alpha} b \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{b^2\operatorname{ctg}\varphi\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}$.

Ответ: $\dfrac{b^2\operatorname{ctg}\varphi\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}$.

Задача 4. Длины сторон параллелограмма равны a и b, а градусная мера острого угла — φ. Докажите, что площадь S параллелограмма можно найти по формуле $S = ab\sin\varphi$.

Решите данную задачу самостоятельно.

Вопросы к § 5

1. Что называется синусом острого угла прямоугольного треугольника?

2. Дайте определение косинуса острого угла прямоугольного треугольника.

3. Что называется тангенсом острого угла прямоугольного треугольника?

4. Дайте определение котангенса острого угла прямоугольного треугольника.

5. Чему равен синус углов: 30°, 45°, 60°?

6. Чему равен косинус углов: 30°, 45°, 60°?

7. Верно ли, что синус острого угла возрастает при возрастании этого угла?

8. Как изменяется косинус острого угла при возрастании этого угла?

Задачи к § 5

366. В прямоугольном треугольнике ABC длины катетов AB и AC равны соответственно 3 см и 4 см. Вычислите синус и косинус угла B.

367. В равнобедренном треугольнике ABC длина боковой стороны равна 10 см, а длина основания — 12 см. Вычислите синус и косинус угла при основании треугольника.

368. Длины оснований равнобедренной трапеции равны 5 см и 15 см, а длина боковой стороны — 13 см. Вычислите синус и тангенс острого угла трапеции.

369. Сторона прямоугольника в два раза больше другой стороны, а его периметр равен 18 см. Вычислите синус и косинус угла, образованного диагональю прямоугольника с большей стороной.

370. Площадь прямоугольника равна 16 см^2, а стороны относятся как $1:4$. Вычислите тангенсы углов, образованных диагональю прямоугольника с его сторонами.

371. В прямоугольном треугольнике ABC отрезок CF — высота, проведенная к гипотенузе AB, $AF = 4$ см, $BF = 9$ см. Вычислите синус, косинус и тангенс угла A.

372. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) углы C и D — прямые, $BC = 4$ см, $CD = 4\sqrt{3}$ см и $AD = 8$ см. Вычислите градусную меру угла BAD.

373. Периметр ромба равен 16 см, а длина одной из его диагоналей равна $4\sqrt{3}$ см. Вычислите градусные меры углов ромба.

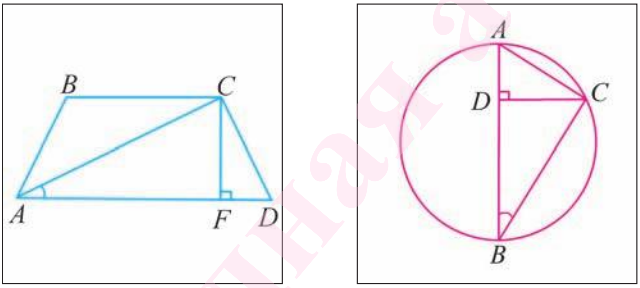
374. Длина гипотенузы прямоугольного треугольника равна 10 см, а синус одного из острых углов равен 0,4. Вычислите длины катетов треугольника.

375. Вычислите градусные меры острых углов прямоугольного треугольника, если длина его гипотенузы равна 14 см, а длина одного из катетов — $7\sqrt{3}$ см.

376. В прямоугольном треугольнике ACB с прямым углом C катет $AC = m$ и $\angle ABC = \varphi$. Найдите длины гипотенузы и другого катета треугольника.

377. Вычислите синус, косинус и котангенс острого угла равнобедренной трапеции, разность длин оснований которой равна 16 см, а сумма длин боковых сторон — 20 см.

378. Длина катета прямоугольного треугольника равна 12 см, а синус противолежащего угла равен 0,8. Вычислите длины других сторон этого треугольника.



а) *б)*

Рис. 138

379. $ABCD$ — равнобедренная трапеция, у которой диагональ перпендикулярна боковой стороне, а высота $CF = 6$ см. Вычислите длины отрезков, на которые точка F делит основание трапеции, и длину ее боковой стороны, если тангенс угла CAD равен $\frac{2}{3}$ (рис. 138, *а*).

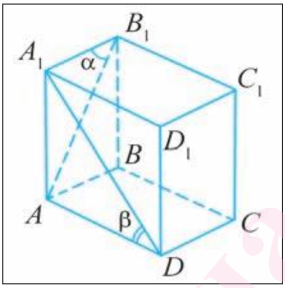
380. AB — диаметр окружности, точка C лежит на этой окружности (рис. 138, *б*). Вычислите диаметр окружности и длину хорды BC, если расстояние CD от точки C до прямой AB равно 12 см, а котангенс угла CBA равен 1,5.

381. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ перпендикулярна стороне AB, а его высота BO равна 24 см. Вычислите площадь параллелограмма, если тангенс угла BDA равен $\frac{3}{2}$.

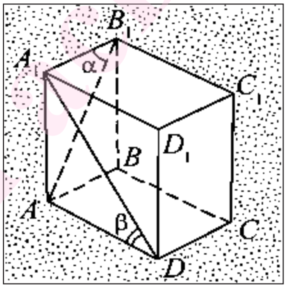
382. Высота ромба равна h, а его острый угол — α. Найдите площадь ромба.

383. Периметр ромба равен P, а его острый угол — β. Найдите площадь ромба.

384. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее острый угол при основании равен α, а длины боковой стороны и средней линии равны сооответственно m и b.



а)



б)

Рис. 139

385. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, AB_1 и A_1D — диагонали его боковых граней (рис. 139, *а, б*). Найдите площади боковых граней параллелепипеда, если $AB = a$, $\angle A_1B_1A = \alpha$, $\angle A_1DA = \beta$.

386. В прямоугольном треугольнике ABC длина гипотенузы AC равна 8 см, а градусная мера угла треугольника равна 28°. Вычислите длины катетов треугольника.

387. Длина катета прямоугольного треугольника равна 6 см, а градусная мера угла равна 47°. Вычислите длины гипотенузы и другого катета.

388. Градусная мера угла при основании равнобедренного треугольника равна 35°, а длина боковой стороны равна 16 см. Вычислите длину основания треугольника.

389. Длина основания равнобедренного треугольника равна 12 см, а градусная мера угла при вершине равна $48°$. Вычислите длину боковой стороны треугольника.

390. Периметр ромба равен 32 см, а градусная мера острого угла равна $34°$. Вычислите длины диагоналей ромба.

391. Длина диагонали прямоугольника равна 40 см, и эта диагональ образует с одной из сторон прямоугольника угол, градусная мера которого равна $72°$. Вычислите периметр прямоугольника.

392. Длины диагоналей ромба равны 16 см и 12 см. Вычислите градусные меры углов ромба.

393. Длина основания равнобедренного треугольника равна 16 см, а высота, проведенная к основанию равна 4 см. Вычислите градусную меру угла при основании.

394. Длина гипотенузы прямоугольного треугольника равна 8 см, а длина катета равна 7 см. Вычислите градусные меры углов треугольника.

395. Высота равнобедренного треугольника в два раза больше его основания. Вычислите градусные меры углов треугольника.

396. Вычислите:

а) $\operatorname{tg} 45° + \sin 30°$;
б) $\cos 60° + \sin 30°$;
в) $\cos 30° + \cos 45°$.

397. Вычислите:

а) $2 \operatorname{tg} 60° - 2 \cos 30°$;
в) $\sin 60° \cos 30° + \dfrac{1}{\operatorname{tg} 45°}$;
б) $\sqrt{2} \sin 45° + \sqrt{3} \operatorname{tg} 30°$;
г) $\operatorname{tg} 60° \operatorname{tg} 30° - \sqrt{2} \cos 45°$.

398. Упростите выражение:

а) $1 - \cos^2 \alpha$;
б) $1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$;
в) $\operatorname{tg}^2\alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha$;
г) $\cos\alpha - \cos\alpha \sin^2 \alpha$;
д) $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha) + \sin^2 \alpha$.

399. Вычислите:

а) $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}3$;

б) $\sin\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}6$;

в) $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{12}{13}$;

г) $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$.

400. Длина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ACB равна 10 см, а $\angle ABC = 60°$. Вычислите: а) длины катетов треугольника; б) высоту CF треугольника; в) площади треугольников ACB и CFB.

401. Из точки пересечения диагоналей ромба проведен перпендикуляр к стороне ромба, который делит ее на отрезки, длины которых — 9 см и 16 см. Вычислите тангенсы углов, образованных стороной ромба и диагоналями.

402. Длина катета прямоугольного треугольника равна b, а градусная мера противолежащего ему угла — β. Найдите длину биссектрисы, проведенной из вершины этого угла.

403. Площадь равнобедренной трапеции равна 32 см^2. Котангенс угла между диагональю трапеции и ее основанием равен 2. Вычислите высоту трапеции.

404. В равнобедренной трапеции $ABCD$ длина боковой стороны равна a. Диагональ делит угол, градусная мера которого равна α, при нижнем основании пополам. Найдите площадь трапеции.

405. Градусная мера острого угла параллелограмма равна α, а длины его сторон равны a и b. Найдите тангенсы острых углов, которые образует со сторонами параллелограмма его большая диагональ.

406. Градусная мера угла при вершине ромба равна α, а его площадь равна S. Найдите длины диагоналей ромба.

407. В равнобедренной трапеции длина диагонали равна a, и диагональ образует с основанием угол, градусная мера которого равна α. Найдите площадь трапеции.

ОТВЕТЫ

Глава 1

§ 1

1. а) Выпуклые: $ABCF$, $ABCDFE$, невыпуклые: $KFOT$; $AEFTL$; б) в грани BB_1C_1C; в) в грани AA_1D_1D. **2.** 30°. **3.** 60°; 60°; 120°; 120°. **4.** $\angle B = 120°$; $\angle D = 30°$. **5.** а) 90°; б) 120°; в) 150°. **6.** 4 см. **7.** 40°. **8.** 4 см. **9.** $\angle BCD = 30°$; $\angle ADC = 120°$. **10.** $\angle BAC = 120°$; $\angle BDC = 60°$. **11.** 15 см. **12.** 19 см. **13.** 12 см. **16.** Да. **18.** 8 см.

§ 2

23. Да. **24.** 24 см. **25.** 5 см; 5 см; 7 см; 7 см. **26.** 8 см; 8 см; 13 см; 13 см. **27.** $6a$. **28.** 3 см; 3 см; 6 см; 6 см. **29.** 8 см. **30.** 32 см. **31.** 4 см. **33.** Да. **37.** 5 см. **40.** 4 см или 5 см. **46.** $\frac{3a}{2}$. **47.** 5 см; 5 см; 10 см; 10 см. **48.** 70°.

§ 3

52. 32 см. **53.** 54 см. **54.** 4 см; 4 см; 12 см; 12 см. **55.** 12 см. **57.** 10 см. **59.** Да. **60.** 40°. **62.** 130°. **63.** 2 см. **64.** 6 см. **65.** $2a$. **66.** 60°. **68.** 20 см; 20 см. **69.** 5,6 см; 5,6 см; 8,4 см; 8,4 см. **70.** a; a.

§ 4

78. 40 см. **79.** 60°; 60°; 120°; 120°. **81.** 30°, 30°, 120°. **82.** $4a$. **83.** 6 см. **84.** 4 см. **89.** Да. **90.** $2a$. **96.** 60°. **98.** $5a$.

§ 5

102. 14 см. **103.** 4 см. **104.** 64 см. **105.** 10 см, 10 см, 6 см, 6 см. **107.** 16 см. **109.** 12,6 см. **110.** 24 см. **114.** 21 см. **115.** 5 см.

§ 6

118. Да. **119.** 5 см. **120.** 10 см. **121.** 14,5 см. **122.** $\frac{a}{4}$. **123.** 8 см. **124.** 3 см. **125.** 4,5 см. **126.** $FO = 5$ см, $OK = 3$ см. **127.** 2 см. **128.** 4,5 см. **129.** 10 см, 30 см. **130.** 5,5 см. **131.** 8 см, 10 см. **132.** 10 см. **133.** 6 см. **134.** 9 см. **135.** 9 см. **136.** $0{,}5a$. **137.** 16 см. **140.** 40°, 40°, 140°, 140°. **142.** 2 см. **143.** 3 см, 11 см.

Глава 2

§ 1

151. 12 см^2. **152.** 24 см. **153.** 36 см^2. **154.** 15 см^2. **155.** 12 см^2. **156.** 24 см^2. **157.** 42 см^2. **158.** 40 см^2. **159.** 40 см^2. **160.** 5000 см^2. **161.** 1000 штук. **162.** 2 см; 4 см. **163.** 9 : 1 или 1 : 9. **164.** Увеличится в 15 раз. **165.** 700 см^2. **166.** 1296 см^2. **167.** 40 см^2. **168.** 32 см^2. **169.** 96 см^2. **171.** $\frac{a^2}{2}$. **172.** 50 см^2. **173.** 48 см^2.

§ 2

175. 30 см^2. **176.** 36 см^2. **177.** 40 см^2. **178.** 20 см^2. **179.** 1,5 см. **180.** 2,5 см. **181.** 5 см. **182.** 3 см. **185.** 4 см. **186.** 5 см. **187.** 24 см^2. **188.** 8 см. **190.** 192 см^2. **191.** 40 см^2. **192.** 15 см^2. **193.** 24 см^2. **194.** 48 см^2. **195.** 6 см^2. **196.** 28 см^2. **197.** 36 см^2. **198.** 4 см. **199.** 4 см. **202.** 24 см^2. **204.** 8 см, 6 см.

205. 6 см^2. **206.** 3 см. **207.** 40 см^2. **208.** 5 см. **209.** 7,5 см^2. **210.** 8 см, 8 см, 4 см, 4 см. **211.** $\frac{m^2}{4}$. **212.** 6 см^2. **213.** 8 см.

§ 3

214. 30 см^2. **215.** 64 см^2. **216.** 44 см^2. **217.** 36 см^2. **218.** 16 см. **219.** 36 см^2. **220.** 12 см^2. **221.** 30 см^2. **222.** 54 см^2. **223.** 90 см^2. **224.** 54 см^2. **225.** 24 см^2. **226.** 6 см. **227.** 2 см; 6 см. **228.** 6 см. **229.** 4 см; 12 см. **230.** 46 см^2. **231.** 12 см^2. **233.** 128 см^2. **234.** 72 см^2. **235.** 40 см^2. **236.** 96 см^2. **237.** 54 см. **238.** 64 см^2. **239.** $\frac{a+b}{2}\cdot m$. **241.** h^2. **242.** $\frac{(a+b)^2}{4}$. **243.** $2S$. **244.** 24 см^2.

§ 4

245. 5 см. **246.** 5 см. **247.** $2\sqrt{3}$ см. **249.** 4,8 см. **250.** 10 см. **251.** 48 см^2. **252.** 108 см^2. **253.** 10 см. **254.** $27\sqrt{3}$ см^2. **255.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ см. **257.** 4,8 см. **258.** 60 см^2. **259.** $4\sqrt{3}$ см^2. **260.** 50 см. **261.** 40 см. **262.** 96 см^2. **263.** $(12+3\sqrt{2})$ см. **264.** 30 см^2. **265.** 10 см. **266.** 120 см^2. **267.** 10 см. **268.** 16 см. **269.** 9,6 см. **270.** 5 см. **272.** 30 см^2. **273.** 24 см^2. **274.** $45\sqrt{6}$ см^2 или 67,5 см^2. **275.** 20 см^2. **277.** 25 см^2. **278.** 300 см^2. **279.** 25 см; 17 см.

Глава 3

§ 1

280. 10 см. **281.** 4 см. **282.** 63 см^2. **283.** 28 см, 35 см, 49 см. **284.** 4 см. **286.** 51 см. **287.** 8 см, 12 см. **288.** 12 см, 6 см. **289.** $4\frac{2}{7}$ см, $5\frac{5}{7}$ см. **290.** 8 см^2, 18 см^2. **291.** 294 см^2. **292.** 96 см. **293.** 6 см. **294.** 176 см или $155\frac{5}{6}$ см. **295.** 72°, 72°, 36°.

§ 2

296. б) Да. **297.** б) Да. **298.** б) Да. **303.** 3 : 1. **305.** 8 см. **306.** 3 см, 9 см. **307.** $9S$. **309.** 48 мм. **310.** $AO = 12$ см, $OC = 8$ см. **311.** б) Да. **312.** 45 см^2. **313.** 160 см^2. **314.** 216 см^2. **316.** $16\sqrt{3}$ см^2. **317.** 1 см, 2 см. **318.** $2\sqrt{13}$ см, $3\sqrt{13}$ см.

§ 3

325. 12 см. **329.** $OT = 3$ см, $OE = 4$ см. **331.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ см^2. **332.** $6(\sqrt{3}+1)$ см. **333.** 16 см, $\sqrt{113}$ см, $\sqrt{113}$ см. **335.** $BO = 2$ см, $OD = 4$ см. **336.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **337.** 53°. **338.** 21 см, 24 см, 33 см, 36 см. **339.** 54 см, 72 см, 90 см, 108 см. **341.** 75 см. **342.** 4,8 см. **343.** $\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2$. **344.** 2,5 см, 5 см. **345.** $\frac{1}{9}$ см^2. **346.** 24 см^2. **347.** $\frac{ab}{a+b}$. **348.** 6 см, 9 см, 9 см.

§ 4

349. $DB = 5$ см, $AC = 31\frac{1}{5}$ см. **350.** $14\frac{1}{12}$ см. **351.** 17,5 см. **352.** $3\sqrt{7}$ см. **353.** 600 см^2. **354.** 130 см^2. **360.** $21\frac{5}{9}$ см^2. **361.** $48\sqrt{3}$ см^2. **362.** 5 см, 13 см. **363.** $\sqrt{p_1^2 + p_1^2}$. **364.** $\sqrt{r_1^2 + r_1^2}$. **365.** $FT = \frac{a}{6}$.

§ 5

366. $\sin B = \frac{4}{5}$; $\cos B = \frac{3}{5}$. **367.** $\frac{4}{5}$; $\frac{3}{5}$. **368.** $\frac{12}{13}$; $\frac{12}{5}$. **369.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **370.** $\frac{1}{4}$; 4. **371.** $\sin A = \frac{3\sqrt{13}}{13}$; $\cos A = \frac{2\sqrt{13}}{13}$; $\operatorname{tg} A = \frac{3}{2}$. **372.** 60°. **373.** 60°; 60°; 120°; 120°. **374.** 4 см; $2\sqrt{21}$ см. **375.** 30°; 60°. **376.** $\frac{m}{\sin\varphi}$; $m\operatorname{ctg}\varphi$. **377.** $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{4}{3}$. **378.** 9 см; 15 см. **379.** 4 см; 9 см. **380.** $AB = 26$ см; $BC = 6\sqrt{13}$ см. **381.** 1248 см^2. **382.** $\frac{h^2}{\sin\alpha}$. **383.** $\frac{1}{16}P^2\sin\beta$. **384.** $mb\sin\alpha$. **385.** $a^2\operatorname{tg}\alpha$; $a^2\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{ctg}\beta$. **401.** $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{3}$. **402.** $\frac{b\operatorname{ctg}\beta}{\cos\frac{\beta}{2}}$. **403.** 4 см. **404.** $a^2(1 + \cos\alpha)\sin\alpha$. **405.** $\frac{a\sin\alpha}{b + a\cos\alpha}$; $\frac{b\sin\alpha}{a + b\cos\alpha}$. **406.** $\sqrt{2S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$; $\sqrt{2S\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$. **407.** $a^2\sin\alpha\cos\alpha$.

Значения тригонометрических функций

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	−1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
ctg	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	−1	$-\sqrt{3}$	—

Значения тригонометрических функций для углов меньше 45° находят, пользуясь верхними наименованиями столбцов; значения тригонометрических функций для углов больше 45° находят, пользуясь нижними наименованиями столбцов.

Градусы	sin	cos	tg	ctg	Градусы
0	0,00000	1,00000	0,00000	—	90
1	0,01745	0,99985	0,01746	57,28996	89
2	0,03490	0,99939	0,03492	28,63625	88
3	0,05234	0,99863	0,05241	19,08114	87
4	0,06976	0,99756	0,06993	14,30067	86
5	0,08716	0,99619	0,08749	11,43005	85
6	0,10453	0,99452	0,10510	9,51436	84
7	0,12187	0,99255	0,12278	8,14435	83
8	0,13917	0,99027	0,14054	7,11537	82
9	0,15643	0,98769	0,15838	6,31375	81
10	0,17365	0,98481	0,17633	5,67128	80
11	0,19081	0,98163	0,19438	5,14455	79
12	0,20791	0,97815	0,21256	4,70463	78
Градусы	cos	sin	ctg	tg	Градусы

Градусы	sin	cos	tg	ctg	Градусы
13	0,22495	0,97437	0,23087	4,33148	77
14	0,24192	0,97030	0,24933	4,01078	76
15	0,25882	0,96593	0,26795	3,73205	75
16	0,27564	0,96126	0,28675	3,48741	74
17	0,29237	0,95630	0,30573	3,27085	73
18	0,30902	0,95106	0,32492	3,07768	72
19	0,32557	0,94552	0,34433	2,90421	71
20	0,34202	0,93969	0,36397	2,74748	70
21	0,35837	0,93358	0,38386	2,60509	69
22	0,37461	0,92718	0,40403	2,47509	68
23	0,39073	0,92050	0,42447	2,35585	67
24	0,40674	0,91355	0,44523	2,24604	66
25	0,42262	0,90631	0,46631	2,14451	65
26	0,43837	0,89879	0,48773	2,05030	64
27	0,45399	0,89101	0,50953	1,96261	63
28	0,46947	0,88295	0,53171	1,88073	62
29	0,48481	0,87462	0,55471	1,80405	61
30	0,50000	0,86603	0,57735	1,73205	60
31	0,51504	0,85717	0,60086	1,66428	59
32	0,52992	0,84805	0,62487	1,60033	58
33	0,54464	0,83867	0,64941	1,53987	57
34	0,55919	0,82904	0,67451	1,48256	56
35	0,57358	0,81915	0,70021	1,42815	55
36	0,58779	0,80902	0,72654	1,37638	54
37	0,60182	0,79864	0,75355	1,32704	53
Градусы	cos	sin	ctg	tg	Градусы

Градусы	sin	cos	tg	ctg	Градусы
38	0,61566	0,78801	0,78129	1,27994	52
39	0,62932	0,77715	0,80978	1,23490	51
40	0,64279	0,76604	0,83910	1,19175	50
41	0,65606	0,75471	0,86929	1,15037	49
42	0,66913	0,74314	0,90040	1,11061	48
43	0,68200	0,73135	0,93252	1,07237	47
44	0,69466	0,71934	0,96569	1,03553	46
45	0,70711	0,70711	1,00000	1,00000	45
Градусы	cos	sin	ctg	tg	Градусы

Учебное издание

Шлыков Владимир Владимирович

ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для 8 класса
общеобразовательных учреждений
с русским языком обучения

3-е издание, переработанное

Зав. редакцией *В. Г. Бехтина*. Редактор *Л. Н. Ясницкая*. Художник *Е. В. Шлыков*. Художественный редактор *Е. П. Протасеня*. Технический редактор *М. И. Чепловодская*. Корректоры *В. С. Бабеня, Д. Р. Лосик, Т. Н. Ведерникова, А. В. Алешко*.

Подписано в печать 14.03.2011. Формат $60 \times 90\ ^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура школьная. Офсетная печать. Усл. печ. л. 10,5. Уч.-изд. л. 8. Тираж 90 600 экз. Заказ .

Издательское республиканское унитарное предприятие «Народная асвета» Министерства информации Республики Беларусь.
ЛИ № 02330/0494083 от 03.02.2009.
Пр. Победителей, 11, 220004, Минск.

Республиканское унитарное предприятие «Минская фабрика цветной печати». ЛП № 02330/0494156 от 03.04.2009.
Ул. Корженевского, 20, 220024, Минск.

(Название и номер школы)

Учебный год	Имя и фамилия учащегося	Состояние учебного пособия при получении	Оценка ученику за пользование учебным пособием
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			